الجُمْهوريَّة العَربيَّة السُّوريَّة

وزارة التّربيـَة



الرّياضيات

الهندسة

كتاب المُدرِّس

الصَّفُّ التّاسع

مرحلةُ التَّعليمِ الأساسيِّ



المؤسّسة العامة للطباعة

2012–2013 م

1433 هـ

طُبِع أوَّل مرَّة للعام الدراسي 2012 – 2013 م



منسِّق اللجنة: عدنان المحاسنة

المؤلفون

رضوان محمد
فاروق العلي
سناء ابراهيم
فراس الجوني
عدنان المحاسنة
كمال نوفل
غسان الحموي
محمد البيريني
مصطفى أبو حسن

التّدقيق العلمي

الدّكتور: عمران قوبا

الدّكتور: عزات قاسم

أ. مروان بركة – أ. ميكائيل

التّدقيق اللّغوي

أ– صفوح الخطيب

التّنضيد والرّسوم والإخراج الفنّي

أسامة أحمد البرم

طبع أوّل مرّة للعام الدراسي
1433 هـ – 2013/2012 م

المقدمة

الزملاء المدرسون:

1. نضع بين أيديكم دليل المدرس لمادة الهندسة للصف الثامن الأساسي بطبعته الأولى آملين الاستفادة منه في إعداد الدروس وتنفيذها مما يساعد على تحقيق النتاجات التعليمية المرجوّة.
2. ونحن إذ نضع هذا الدّليل بين أيديكم؛ فإننا نُقدّم أمثلة واجتهادات لا نتوقّع منكم الوقوف عندها فحسب، بل أن تكون منطلقاً لتنمية خبراتكم وإبراز قدراتكم الإبداعية في وضع البدائل والأنشطة المتنوعة وإضافة الجديد إلى المحتوى وبناء أدوات تقويم بمعايير أخرى جديدة.
3. لقد تمَّ تأليف كتاب الطالب وفق رؤية تدريسية نأمل من خلالها تحقيق أهداف الدرس، وهده الرؤية أتت من استراتيجيات تدريس أثبتت الدراسات التربوية جدواها.

استراتيجيَّات تدريس الرياضيَّات

أولاً: تعليم الرياضيَّات من خلال العرض المباشر

وفيه يكون المعلِّم محور عمليَّةِ التعليم – التعلُّم، وهو مصدرُ المعلوماتِ والمعرفة، التي ينقلُها إلى تلاميذُه من خلال العرض المباشر.

والمعلِّم هنا هو المرجعيَّةُ الوحيدة لحلّ المشكلات وتقديم المعلومات الجاهزة وأساليب الحلِّ.

يُعدُّ هذا النموذج فعَّالاً في نقل كمِّيَّةٍ كبيرةٍ من المعلومات في وقتٍ قصير.

سلبيَّات نموذج العرض المباشر

1. يهمِّشُ دورَ التّلميذ في عمليَّة تعلُّمه ويحوّله إلى مستقبلٍ سلبيٍّ للمعلومات.
2. لا يراعي الفروق الفرديَّة للتلاميذ.
3. لا يسترعي انتباهَ التّلاميذ واهتماماتِهم.
4. يُفقِدُ التّلاميذ الرغبةَ في تعلُّم الرياضيَّاتِ، ويساهمُ في تكوين اتِّجاهٍ سلبيٍّ لديهم نحوها.
5. يؤدِّي إلى الخمول الفكريِّ لدى التّلاميذ.

أمورٌ يجبُ أن تراعى عند استخدام نموذج العرض المباشر:

1. سهولةُ اللّغة ووضوحها.
2. الترتيبُ المنطقيُّ للمعلومات.
3. استخدامُ الاستدلال المنطقيِّ للمعلومات.
4. إشراكُ التَّلاميذ في النقاش.
5. استخدامُ الوسائل التعليميَّة المختلفة.
6. الاستخدامُ المتكرِّر للتقويم.
7. التنويعُ في أساليب الإلقاء.
8. مراعاةُ معارفِ التَّلاميذ وخبراتِهم السابقة.

ثانياً: تعليم الرياضيَّات بالاكتشاف

يقوم على مبدأ محوريَّة التّلميذ في التعلُّم، ويتيحُ هذا النموذجُ للتلميذِ فرصةَ التفكيرِ ومعالجةِ المعلومات والبحثِ عن الأنماطِ والعلاقات المتضمِّنة فيها.

إستراتيجيَّاتُ التَّعلُّم الاكتشافي :

الاستراتيجيَّة الاستقرائية (Induction):

تتضمَّن هذهِ الاسترتيجيَّة الوصولَ إلى القواعد أو التعميمات عن طريق معالجة عدد من الأمثلة أو الحالات الفردية، وهي ملائمةٌ لتلاميذ الصفوف الأولى حيث أنَّها تُعنى بملاحظة الأنماط والبحث عن علاقاتٍ بين المعلومات، وهذا ما يجيده تلاميذُ الصفوف الأولى.
يمكن أن يوجِّه المعلِّم تلاميذه نحو الاكتشاف الاستقرائيِّ عن طريق عرض مجموعةٍ من الأمثلة، ومن ثمَّ الوصول إلى تعميمٍ، بعد ذلك يشجِّعُ المعلِّم التَّلاميذ على تجريب أمثلةٍ أخرى للتأكُّد من الاستنتاج.

مثال على الاكتشاف: مجموع قياسات زوايا المثلَّث =180 درجة

يقدِّم المعلِّم للتلاميذ ورقة عمل مرسوم عليها مجموعةٌ من المثلَّثات، ويطلبُ من التَّلاميذ قياس زوايا كلِّ مثلَّث، وجمعَها، وكتابةَ الناتج تحت كلِّ مثلَّثٍ.

يسألُ المعلِّم التَّلاميذَ: ماذا تلاحظون؟ ثمَّ ماذا تستنتجون؟

وأخيراً يطلبُ المعلِّم إلى التَّلاميذ رسمَ مثلَّثاتٍ أخرى، وقياس زواياها للتأكُّد من استنتاجهم.

الاستراتيجيَّة القياسيَّة (Deduction):

تتضمَّن هذه الاستراتيجيَّة توظيفَ مبادئ المنطقِ للوصول إلى تعميماتٍ يمكنُ عندئذ تقويمُها بقصد الوصول إلى حالاتٍ خاصَّةٍ أو تطبيقات لها، وتُعتبَرُ صعبةً بالنسبة لتلاميذِ المرحلة الابتدائيَّةِ، وقد تكونُ أكثرَ ملاءمةً للاستخدام في المراحل المتقدِّمة.

مثال: يستنتجُ التِّلميذُ أنَّ مساحةَ المنطقةِ المثلَّثةِ = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع، وذلك باستخدام معرفته السابقة بأنَّ مساحةَ المنطقةِ المستطيلةِ = الطولَ × العرضَ، حيثُ أنَّهُ يمكنُ تقسيمُ المستطيل إلى مثلَّثين متطابقَيْن في المساحة.

ميزاتُ النموذج الاكتشافي:

1. تفعيلُ دور التَّلاميذ في عمليَّة تعلُّمهم.
2. تحفيزُ القدرات العقليَّة للتلاميذ.
3. إكسابُ التَّلاميذ خبرةً في عمليَّات الاستقصاء الرياضيِّ.
4. إطالةُ مدَّة الاحتفاظِ بما يتمُّ تعلُّمه.
5. إكسابُ التَّلاميذِ الثقةَ بالنفس.
6. إكسابُ التَّلاميذ اتجاهاً إيجابيَّاً نحو الرياضيَّات.
7. تشويقُ التَّلاميذ وإكسابُهم الفضولَ لمعرفة المزيدِ من الرياضيَّات، وتشجيعُ التعليم الذاتيِّ.
8. إكسابُ المعلِّم قدرةً أكبرَ على التعامُل مع الفروقِ الفرديَّة بين التَّلاميذ.

إرشاداتٌ للمعلِّم حول استخدام النموذج الاكتشافي:

1. تحفيزُ التَّلاميذِ، وتحدّي عقولَهم من خلال المواقف والمشكلات المحيِّرة.
2. الانطلاقُ ممَّا يعرفُه التَّلاميذ والتقدُّم باتِّجاه اكتشاف معلوماتٍ جديدةٍ.
3. عدمُ تدخُّل المعلِّم في عمل التَّلاميذ إلاَّ في أوقات الضرورة.
4. السماحُ بتعدُّد طرقِ واستراتيجيَّاتِ العمل.
5. استخدامُ الموادِّ المحسوسة والوسائلِ التعليميَّة المختلفة.
6. استخدامُ أسلوبٍ فعَّالٍ للمساءلة وإدارةِ الحوار.
7. تشجيعُ العمل في مجموعات.

ثالثاً: تعليم الرياضيَّات عن طريق حلّ المشكلات:

المشكلةُ: موقفٌ جديدٌ يتطلَّبُ حلاً، يستثيرُ في الشخص الرغبةَ في العمل على إيجادِ حلّ له.

يحتلُّ حلّ المشكلات مكانة خاصة في الرياضيَّات، فهو وسيلة الرياضيَّات وغايتها.

كان يتمُّ تدريسُ حلّ المشكلات تقليديَّاً كموضوعٍ في الرياضيَّات. أما وقد بدأ التحوُّل في نظرةٍ جديدةٍ للرياضيَّات وأساليب تدريسها، فقد أصبح المطلوبُ تدريسَ الرياضيَّات في سياق حلّ المشكلات في بيئةٍ صفِّيَّةٍ مشجِّعةٍ على الاستقصاء.

الشروطُ الواجبُ توافرها في الموقف ليكونَ مشكلةً:

1. إثارةُ رغبة المتعلِّم في إيجاد حلّ للموقف.
2. عدمُ توافرِ طريقةٍ جاهزةٍ للحلّ عند المتعلِّم.
3. استقصاءُ سبلٍ لحلّ الموقف من قبل المتعلِّم.
4. اعتبارُ الموقفِ مشكلةً يرتبطُ بالشخص المعنيِّ بحلّ ذلك الموقف.

استخدامُ حلّ المشكلات كطريقةٍ في التَّدريس:

في العادة يدرِّسُ المعلِّمُ تلاميذَه المفاهيمَ والعملياتِ بطريقةِ العرضِ المباشرِ، ثم يطلُب إليهم استخدامَ هذه المفاهيمِ والعمليَّاتِ في حلّ المشكلات. وفي أحسن الأحوال يكونُ تعليمُ المفاهيمِ والعمليَّات مصحوباً بتفسيراتٍ تتضمَّن استخدامَ المحسوسات والوسائل التعليميَّةِ المختلفة. وعلى الرغم من أنَّ هذا الأسلوبَ قد ينجحُ في تمكين بعض الطلبة من الفهم، غيرَ أنَّه يفشلُ في تحسين اتِّجاه التَّلاميذ نحو الرياضيَّات، ويحرمُهم من متعة الاكتشاف.

إنَّ الفصلَ بين تدريسِ الرياضيَّات وحلّ المشكلات هو فصلٌ بين تعلُّم الرياضيَّات والعمل فيها.

إنَّ التدريسَ من خلال حلّ المشكلات يتطلَّبُ أن يمتلكَ المعلِّم قناعةً كبيرةً بأنَّ لدى الطلبةِ ما يكفي من الأفكار لمساعدتِهم على بناء أفكارٍ جديدةٍ.

وكذلك فإنَّ ضمانَ انخراط التَّلاميذ في عمليَّة التعلُّم يتطلَّبُ أنشطةً تستثيرُ التفكيرَ، أي أنشطة تتضمَّن حلّ مشكلات.

ميزات أسلوب حلّ المشكلات:

1) يساعدُ أسلوبُ حلّ المشكلات في تركيز انتباهِ الطالب للأفكار الرياضيَّة وتكوين المعنى. إنَّ انخراطَ الطالب في عمليَّةِ حلّ المشكلات يجعلُه في حالة تفكيرٍ دائمٍ بالمفاهيم والعمليَّات المتضمَّنة في المسألةِ رابطاً إيَّاها بما لديه من معرفةٍ ومعلوماتٍ سابقة.
2) يوفِّر هذا الأسلوبُ فرصاً حقيقيَّةً للتّلاميذِ للانخراط في معايير العمليَّات الخمس. فليس هناك عمليَّة حلّ مشكلاتٍ تخلو من استخدام الاستدلال الرياضيّ والتواصُل حول الأفكار الرياضيَّة. كذلك، فهناك فرصةٌ كبيرةٌ لاستخدام الترابطاتِ والتمثيل.

3) يساهمُ هذا الأسلوبُ إلى حدٍّ كبيرٍ في تحسين اتّجاهات التّلاميذ نحو الرياضيَّات، ويزيدُ من ثقتِهم في قدراتهم. فمن خلال حلّ المشكلات يستشعرُ التّلاميذ أنَّ الرياضيَّات موضوعٌ مفيدٌ وذو معنى. كذلك فإنَّهم يدركون بأنَّه يمكنُ استكشافُها والعملُ فيها من قبل الجميع، وأنَّها ليست حكراً على نخبةٍ محدودة.

4) يوفِّر هذا الأسلوبُ فرصةً للتقويم المستمرِّ لفهم التَّلاميذ للرياضيَّات. فعند الانهماك في حلّ المشكلات، فإنَّ التَّلاميذ يفكِّرون مع معلِّمهم بصوتٍ عالٍ، ويستخدمونَ استراتيجيَّاتهم ويتبادلون الآراءَ، مما يتيحُ للمعلِّم أن يطَّلع على نقاط قوَّتهم وضعفهم وبالتالي تقديم التغذية الراجعةِ لهم في الوقت المناسب.

5) إنَّ حلّ المشكلات أسلوبٌ ممتعٌ في تدريس الرياضيَّات. فهو ممتعٌ للتَّلاميذ، لأنَّهم يجدون فيه تحدِّياً لتفكيرهم، ويستكشفونَ من خلاله أفكاراً جديدة. وهو ممتعٌ للمعلِّم لأنَّه يراقبُ تلاميذَه وهم يكوِّنون فهماً للرياضيات من خلال الاستدلال والتواصُل وحلّ المشكلات.

6) إنَّ الانخراط في حلّ المشكلات يُكسِبُ التّلميذَ إحساساً بنشوة النجاح عند حلّ مشكلةٍ، ممَّا يدفعُه إلى حلّ المزيد من المشكلات ويثيرُ فضوله إلى تعلُّم المزيد من الرياضيَّات.

مراحل حلّ المشكلة:

1) **فهم المشكلة:** وتتضمَّن هذه المرحلة فهمَ نصِّ المشكلة وتحديد المُعطيات والمطلوب.
2) **وضعُ خطَّةٍ للحلِّ:** وتتضمَّن هذه المرحلةُ اختياراً أو ابتكارَ استراتيجيَّة للحلِّ، وعلى التّلميذ أن يفكِّرَ في الأمورِ الآتية:
   - أ- التشابهُ بين المشكلة ومشكلاتٍ أخرى قام بحلِّها في السابق.
   - ب- الإستراتيجيَّات التي يعرفُها لحلّ المسائل المشابهة.
3) **تنفيذُ خطَّة الحل:** وهنا ينفِّذ التّلميذُ الخطَّة المقرَّرةَ في المرحلة (2). ولابُدَّ من مراعاة الدَّقةِ في تنفيذ الخطَّة وإجراء الحسابات المتضمَّنة.
4) **مراجعةُ الحلِّ:** على التّلميذ أن يعيد قراءةَ السؤال ويفكِّر فيما إذا أجاب على المطلوب فيها وكذلك فيما إذا كان الجوابُ معقولاً.

إستراتيجيَّات حلّ المشكلات:

1) استراتيجيَّة رسم صورة أو مخطَّط:

وتتضمَّن استخدامَ الرسومات والخرائط والمخطَّطات.
تتأتَّى فائدةُ هذه الطريقةِ من خلال الفرصة التي تتهيَّأُ للتَّلميذ لرؤية المتغيِّرات في المسألة وكذلك العلاقاتُ بين هذه المتغيِّرات.
كما أنَّها تفيد في تنظيم المعلومات وهذا بدوره قد يقودُ إلى اختيار استراتيجيَّة أخرى لحلّ المسألة.

مثال1: أربعةُ أصدقاءَ، صافحَ كلٌّ منهم الآخر مرَّةً واحدةً. ما مجموعُ المصافحات؟

مثال2: ينصبُّ الماءُ في خزَّانٍ بمعدل 50 لتراً في الساعة، ويتسرَّبُ منه بمعدل 15 لتراً في الساعة. فما الزيادةُ في حجم الماء في الخزَّان بعد مضيِّ 3 ساعات؟

2) استراتيجيَّة التمثيل أو المسرحة:

تقومُ على تمثيلِ الموقفِ أو مسرحته للحصول على الإجابة.

ففي المسألةِ السابقة يمكنُ أن يقوم 4 تلاميذٍ بمصافحةِ بعضهم البعض (على ألاَّ يتصافحَ اثنان أكثرَ من مرَّةٍ واحدةٍ)، ويقوم آخرُ بمتابعة المصافحات وعدِّها.

3) استراتيجيَّة المحاولة والخطأ:

كثيراً ما تساعدُ استراتيجيَّة المحاولة والخطأ في حلّ المسائل الرياضيَّة، ولذلك يجبُ تشجيعُ التَّلاميذ على استخدامها عندما يكونُ ذلك مناسباً.

يجبُ الانتباهُ إلى أنَّه من غير العمليِّ أن تكون كلُّ المحاولات عشوائيةً وغيرَ مرتبطة ببعضها، لأنَّ ذلك يقودُ إلى إطالة الزمن اللاَّزم للحلّ أو قد لا يقود نهائيَّاً.

والصحيحُ أنْ تُبنى كلُّ محاولة على ما سبقها من محاولاتٍ من أجل الاقتراب من الحلّ الصحيح.

مثال: ثمنُ الكرة الصغيرةِ 30 ليرة، وثمن الكرة الكبيرة 50 ليرة. اشترت زينب 10 كرات بمبلغ 360 ليرةً. فكم كرةً صغيرةً وكم كرةً كبيرةً اشترت زينب؟

4) استراتيجيَّة حلّ مسألةٍ أبسطَ:

عادةً ما تستخدمُ هذه الاستراتيجيَّةُ مع استراتيجيَّةٍ أخرى.

تبسيط المسألة يكونُ إمَّا باستخدامِ أعدادٍ أقلّ أو استخدامِ مسألةٍ مألوفةٍ أكثرَ قد تقودُ إلى استراتيجيَّة مناسبة للحلّ.

كذلك قد يأخذ التبسيطُ شكلاً آخرَ، كتقسيم المسألة ذات الخطوات المتعدِّدة إلى مجموعةٍ من المسائل تُحلّ كلٌّ منها على حدة.

مثال: مئة صديقٍ يصافح كلٌّ منهم الآخر مرَّة واحدةً. ما مجموع المصافحاتِ؟

5) استراتيجيَّة العمل للخلف (الحلّ العكسيُّ):

في بعضِ المسائلِ يكونُ العملُ إلى الخلفِ مفيداً ويوفِّر بعض الجهد، خاصَّة إذا كان الطالبُ يواجهُ صعوبةً في تكوين المعادلات الجبريَّة أو استراتيجيَّات العمل إلى الأمامِ بشكلٍ عامٍّ.

واستخدامُ هذه الاستراتيجيَّة يتضمَّن البدءَ من الخلف، أي من ناتج المسألة باتِّجاه مقدَّمتها.

مثال: بائع تفَّاح متجوِّل، يجوبُ القرى ليبيعَ حمولته. وفي يومٍ صادفَ أن مرَّت مبيعاتُه بنمط رياضيٍّ عجيبٍ. ففي كلِّ قريةٍ دخلها، كان يبيعُ نصف ما معه من صناديق التفَّاح. وعندما وصل إلى القرية

الخامسة ، لم يكن معه سوى صندوق واحد ، فباعه وعاد إلى بيته. فكم صندوقاً من التفاح كان معه في بداية الرحلة؟

6) استراتيجيَّة اعتبار كلِّ الإمكانات ثمَّ الحذف:

تتضمَّن هذه الاستراتيجيَّة اعتبارَ كلِّ احتمالاتِ الحلّ، ثمَّ حذفَ الأجوبة الخطأ.

باستخدامِ هذه الاستراتيجيَّات يقوم التّلميذ بحذف الإجاباتِ غير الصحيحة حتَّى يتبقَّى إجابة واحدة هي الإجابة الصحيحة.

مثال: عددٌ أكبرُ من 65 وأقلُّ من 80 يقبل القسمة على 3 بدون باق. الفرق بين الرقمين المكونين لرمزه هو 2. ما ذلك العدد؟

7) استراتيجيَّة البحث عن نمط:

على التّلميذ أن يبحث عن وجودِ نمطٍ في المعلومات المعطاة، أو التي تمَّ الحصول عليها باستخدام استراتيجيَّة أخرى، بعد ذلك يتوصَّلُ التّلميذُ إلى تعميمٍ يستخدمُه في حلّ المسألة. والأنماط قد توجد في الأعداد أو الأشكال أو السلوك.

وكثيراً ما يحتاجُ التّلميذُ عند استخدام هذه الاستراتيجيَّة إلى تكوين جدولٍ أو قائمة بالمعلومات لتسهيل عمليَّة البحث.

مثال: املأِ الفراغاتِ في الجدول:

س	1	2	3	4	6	
ص	2	5	10			65

8) استراتيجيَّة تكوين جدول:

تتضمَّن هذه الاستراتيجيَّةُ تنظيمَ البياناتِ في قوائمَ أو جدولَتَها لتسهيل التأمُّل فيها والتفكير بخطَّة مناسبةٍ للحلّ.

ويجبُ الانتباهُ هنا إلى أنَّ بعض التَّلاميذ لا يفلحون في تنظيم البيانات بشكلٍ ملائم، ممَّا يستدعي مراقبةَ المعلِّمَ عملَهم عن كثبٍ وإبداءَ المساعدة إنْ لزم الأمر.

وكذلك يجبُ أن يُعطى التّلميذُ الفرصةَ الكافية لممارسة تنظيم البياناتِ وجدولتَها لإتقان المهارة.

مثال: ما مجموعُ قياسات الزوايا الداخليَّة لمضلَّع عددُ أضلاعه 20 ؟

9) استراتيجيَّة الاستدلال المنطقي:

وهنا يستخدمُ المتعلِّم قدرتَه على الاستدلال المنطقيِّ في حل المسألة.

مثالٌ: لدينا ثلاثُ كراتٍ، الأولى بيضاءُ والثانية حمراءُ والثالثة خضراءُ. تعود هذه الكرات إلى أحمدَ، عليٍّ وزيادٍ :

زياد لا يحبُّ اللَّون الأحمر.

كرةُ عليٍّ هي البيضاء

لمن تعود كلٌّ من الكرات؟

10) استراتيجيَّة تغيير وجهة النظر:

تدعو هذه الاستراتيجيَّة إلى عدم وضعِ شروطٍ غيرِ موجودةٍ في المسألة، فالكثير منَّا يفترِض أحياناً وجودَ شروط في المسألة ممَّا يعيق التفكيرَ في وضع خطَّةٍ ناجحةٍ لحلها.

مثال1: كيف يمكن أن تزرعَ 10 شتلاتٍ في 5 خطوطٍ مستقيمةٍ بحيث يضمُّ كلُّ خطٍّ 4 شتلات؟

مثال2: أعد حلَّ المسألة بحيث تكون المعطيات:

1. 12 شتلة في 6 صفوف بأربع شتلات لكلٍّ منها.
2. 19 شتلة في 9صفوف بخمس شتلات لكلٍّ منها.

11) استراتيجيَّة كتابة جملة مفتوحة:

تتضمَّن هذه الاستراتيجيَّةُ كتابةَ معادلةٍ جبريَّةٍ لحلّ المسألة.

مثال: إذا كان شراء مسطرتين و4 أقلام يكلِّف أكثر من شراء قلمين و4 مساطرَ بليرتين. فما الفرق بين سعر القلم وسعر المسطرة؟

مسألتان أساسيَّتان يجبُ مراعاتُهما عند التدريس عن طريق حلّ المشكلات:

1) إنَّ هذا النوع من التدريس يتطلَّبُ من المعلِّم مراقبة التَّلاميذِ مراقبةً حثيثةً ودائمةً أثناء القيام بالحلّ وذلك لمتابعة تقدُّمهم في حلّ المسألة أوّلاً، وللتأكُّد من أنَّ جميعَ التَّلاميذ منخرطين في الحلّ ثانياً، حيث إنَّنا لا نستطيعُ افتراضَ أنَّ جميعَ التَّلاميذ جادّون، فقد يلجأ بعضُهم إلى العبث تاركاً مسؤوليَّة حلّ المسألة لزملائه في المجموعة في حالة العمل التَّعاوني مثلاً.

2) يجبُ أن يستخدمَ التَّلاميذُ أقصى طاقاتِهم في التفكير من أجل حلّ المسألة، وهذا يقتضي أن يضبط المعلِّم مسألةَ إعطاءِ الدلائلِ والمساعدات للتلاميذِ و إلاَّ سيفقدُ حلّ المشكلات أهدافَه المتوخَّاة.

تدريس حلّ المشكلات:

1. **إنَّ تعلم حلّ المشكلات لا يمكنُ أن يتمَّ دون ممارسة:** وهذا يعني أنَّه على المعلِّم أن يجعلَ من حلّ المشكلات موضوعاً دائم الحضور في تدريس كلِّ الموضوعاتِ الرياضيَّة. وهذا يتطلَّبُ تعريضُ التَّلاميذ وباستمرار لمسائلَ مختلفةٍ سواء كجزء من النشاط الصفِّيِّ أو على شكل مسابقات توضع على جداريَّاتِ غرفة الصفِّ أو من خلال الواجباتِ المنزليَّة.
2. **إغناء حصيلة التَّلاميذ باستراتيجيات حلّ المشكلات:** ويمكن للمعلِّم أن يساهم في عمليَّة الإغناء هذه عن طريق الدلائل والمقترحات التي يقدِّمها للتلاميذ عند الحاجة، وكذلك من خلال المناقشة المفتوحة بين التَّلاميذ حول استراتجياتهم المختلفة في حلّ المشكلات.
3. **تنمية روح الاستقصاء لدى التَّلاميذ:** إنَّ المهارة في حلّ المشكلات تتطلَّب من المتعلِّم الرغبةَ في البحث عن الحلول والفضول وحبِّ الاستطلاع. ومن الواضح أنَّ خلقَ مثلِ هذه الرغبةِ ليس سهلاً، وبخاصَّةٍ إذا لم يكن التَّلاميذُ معتادين على حلِّ المشكلات. وهذا يضيفُ عبئاً إلى المعلِّم الذي يجبُ أن يبذلَ كلَّ جهدٍ ممكنٍ لخلقِ مناخٍ ملائمٍ للاستقصاء وحلِّ المشكلات في صفِّه. وممَّا يساعدُه في ذلك اختيارُ مسائلَ ممتعةٍ ومشوّقةٍ تستثيرُ اهتمامَ التَّلاميذ ورغبتَهم في إيجادِ الحلول. كذلك فقد وُجِد أنَّ إعطاءَ التَّلاميذ أنفسَهم الفرصة لصياغة المسائلِ وطرحِها على زملائهم ترفعُ من روح الاستقصاءِ لديهم.
4. **إعطاء التَّلاميذ حريَّة استخدامِ استراتيجيَّاتهم الخاصَّة:** على عكس ما قد يعتقد بعضُ المعلِّمين، فإنَّ لدى التَّلاميذ وفي مختلف المراحل الدراسيَّة القدرةَ على ابتكار استراتيجيَّاتٍ خاصَّة بهم لحلِّ المسائل. إنَّ من واجب المعلِّم أن يترك للتلميذ حريَّةَ استخدامِ هذه الاستراتيجيَّات دون فرضِ أيِّ أسلوبٍ خاصٍّ في الحلِّ سواء بشكل صريحٍ أو ضمنيٍّ. وحتَّى عندما تفشل استراتيجيَّاتُ التَّلاميذ في الوصول إلى الحلِّ، فإنَّ على المعلِّم أن يقودَهم إلى استنتاج أخطائهم دون أن يحكُم هو شخصيَّاً على خطأ هذه الاستراتيجيَّات.

أسسُ اختيار المسألة: يجب أنْ:

1) تتضمَّنَ المسألةُ أفكاراً رياضيَّة هامَّةً.
2) يتضمَّنَ سياقُ المسألة كائناتٍ حقيقيَّةً أو محاكاةً واضحةً لكائناتٍ حقيقيَّةٍ.
3) تستثيرَ المسألةُ التَّلاميذ.
4) تكونَ المسألةُ مرنة قدر الإمكان (أن تتضمن مستويات مختلفة من الصعوبة).
5) يكونَ بالإمكان إيجادُ مواقفَ مشابهةٍ للموقف الذي تمثِّله المسألة.

رابعاً: تعليمُ الرياضيَّات عن طريق التعليم التَّعاونيَ :

يفيدُ التعليمُ التَعاونيَ بوجود الأقرانِ من التَّلاميذ ويشجِّعُ التفاعلَ بين الطالب وزميلِه، ويبني علاقاتٍ تكامليَّةٍ بين أعضاء المجموعة.

يتعلَّم التَّلاميذ في المجاميعِ الفاعلةِ كيف ينصتون لآراء الغير، وكيف يناقشون ويرفضون، وكيف يقدِّمون، ويقبلون النقدّ البنَّاءَ من زملائهم، وكيفيَّة الشعور بالراحة وعدم الوقوع في الخطأ.

ضمانات التعلُّم التعاونيّ:

يجب أن يدركَ أعضاءُ المجموعة بأنَّهم جزءٌ من فريقٍ، ولكلٍّ منهم هدفٌ مشتركٌ واحدٌ، و أنَّ لعملِ كلِّ عضوٍ تأثيراً مباشراً على عملِ المجموعةِ، والمسألةُ التي هم بصددِ حلِّها تخصُّ المجموعةَ وأن النَّجاحَ أو الفشلَ في حلِّها يشملُ كلَّ الأعضاء.

ولتحقيق هدف المجموعة يجبُ أن يتحدَّث الأعضاءُ جميعاً مع بعضهم، ويندمجون في النقاشِ حول كلِّ المسائل.

لا يعدُّ جلوس الطلبة معاً مجموعاتٍ جوّاً تعاونيَّاً وهم يعملون على المسائل انفراديَّاً، أو يتركون شخصاً واحداً ينهضُ بأعباء العمل كلِّها. يتطلَّبُ التعاونُ الصحيحُ في عمليَّةِ التعليم إرشادَ المعلِّم والذي يستطيع مساعدةَ التَّلاميذ على فهم آليّة المجموعة، ويسعى في تطوير المهارات التعاونيَّة التي يحتاجونها ويتعلَّمون الرياضيَّات من خلال العمل في مجموعات.

كيفيَّة تكوين وتشكيل مجموعات تعليميَّة صغيرة:

يمكنُ تشكيل المجموعاتِ التعليميَّة بعدَّةِ طرائقَ. وقد صُمِّمت كلُّ طريقة لضمان وجود اعتمادٍ إيجابيٍّ داخلَ كلِّ مجموعةٍ، والتزامٍ فرديٍّ، وتخاطبٍ كلاميٍّ وجهاً لوجه، وتفاعُلٍ اجتماعيٍّ إيجابيٍّ. وتتوجَّه الأساليبُ إلى أربع محاورَ وهي: تشكيلُ المجموعة، وتصميمُ الواجبات(المهام)، وأساليب المكافأة، والمعالجة الجماعيَّة.

أوَّلاً: تكوين المجموعة (Group formation)

يجبُ أن تكون العضويَّةُ في المجموعة متنوِّعةً سواء فيما يخصُّ القدرات أو الخصائصَ الفرديَّةِ، كما يجبُ أن تبقى المجموعةُ ما يكفي من الوقتِ لتطوير التماسُك. إنَّ المجموعة الناجحة ستكون صغيرة ما يكفي لكل واحد حسب حاجته لها، وكبيرة ما يكفي للسماح بتنوع الأفكار والمهارات.

إنَّ الطريقةَ الأكثرَ فاعليَّةً في ضمان التنوُّع هي تنظيمُ المعلِّم المجموعاتِ غير المتجانسة (الذين يذاكرون مع الذين لا يذاكرون، التَّلاميذ ذوي القابليَّات العالية مع المتوسِّطة والمنخفضة...الخ)ويمكن الأخذُ بعين الاعتبار رغبةُ بعض التَّلاميذ في الانضمام إلى من يحُبون من الزملاء.

يُعدُّ أحدُ مقاييسِ نجاح المجموعة استمرارُها. ويأخذُ التماسكُ وقتاً ليتطوَّر في المجموعة. وعندما يعلم التَّلاميذ أنَّهم سيبقون في المجموعة معاً لبعض الوقت فإنَّهم يدركون أنَّ عليهم تحسينَ مهاراتهم المرئيَّةِ المتبادَلة لكي يستطيعوا العملَ بشكلٍ فعَّال.

وقد تُبنى مجموعاتُ التعلُّم الصغيرةِ معاً خلال وحدةِ عملٍ كاملةٍ، أو فصلٍ، أو سنة. وبالرَّغمِ أنَّه من الضروريِّ بقاءُ المجموعاتِ سويَّة، وتعلُّمهم كيفيَّةَ العملِ بشكلٍ إنتاجيٍّ متناغمٍ، فإنَّ التغييراتِ يجبُ أن تُجرَ إذا لم تعملْ بعض المجموعاتِ بشكلٍ جيّدٍ. وعندما يكون التَّلاميذ غير راضين أو مرتاحين مع أعضاء مجموعتِهم فمن غير المحتملِ إمكانيَّةُ مشاركتهم في التعبير الحرِّ واستكشاف الأفكار. لذا من الضروريِّ أن يبقى المعلِّم على علم بسلوك ومواصفاتِ كلِّ عضوٍ في المجموعة. وإحدى الطرائق لتحقيق ذلك ستكون بمراقبة تفاعلُ التَّلاميذ مع بعضهم في المجموعة.

قد تبدو المجموعةُ وكأنَّها تعملُ بصورةٍ جيِّدةٍ ولكنَّ المشاهدةَ قد تكون خادعة أحياناً، لذا يجبُ الطَّلبُ إلى التَّلاميذ استخدامَ النَّشرات لتبادُلِ شعورهم حول مجموعاتِهم والطَّريقةِ التي يعملون فيها داخلَها. يجبُ أن يعلِّقوا على المساعدة التي تلقُّوها أو التي أبدَوها داخلَ المجموعة. ويجبُ أن يقرِّرَ التَّلاميذ والمعلِّم معاً متى وفيما إذا كان يجبُ استبدال تشكيلاتِ المجموعة.

ويؤثِّرُ حجمُ المجموعة على قابليَّتها كي تكونَ منتجةً. وقد أظهرتِ التجربةُ أنَّ المجموعاتِ المتكوِّنةِ من 3 – 5 طلاَّب تعملُ جيِّداً. ولا يجبُ أن تكون المجموعةُ كبيرةً ، عندها يصبحُ عملُها بصورةٍ فعَّالةٍ أمراً صعباً. ويميلُ الطَّالبُ الأعلى صوتاً للسيطرة ويتراجعُ الهادئون إلى الخلف. ويكون من الصَّعبِ في المجموعةِ الكبيرةِ لكلِّ طالب أن يطلقَ أفكارَه. فضلاً على أنَّه من الصعب على المجموعةِ الكبيرة أن تكونَ منظَّمة لتنسيق عملِها للوصول إلى حالة تناغُم.

ولزيادةِ الشعورِ بالصداقة الحميمة، فقد تطلقُ المجموعة على نفسِها اسماً. وفي حال استقرار المجموعاتِ تؤخَذُ صورٌ لهم، وتوضَع على لوحةِ النَّشرة. وسوف يسهم هذا في إضافة الدفءِ والمتعة لكونهمِ جزءاً من مجموعةٍ تعليميَّةٍ واحدةٍ.

ثانياً: تصميماتُ المهمَّة (Task designs)

لنجاح المجموعة التعلُّميَّة الصَّغيرة، يجبُ على التَّلاميذ أن يتصوَّروا أنفسَهم وكأنَّهم يعتمدون على بعضِهم البعض، وأن يتواصلوا وأن يكونوا مسؤولين عن العمل بشكلٍ فرديٍّ.

يتقاسمُ أعضاء المجموعاتِ الأخرى المسؤوليَّةَ في تعلُّمِ كلِّ فرد، ويتوقَّع من أعضاء المجموعةِ أن يساندوا ويشجِّعوا بعضهم البعض. ويكون التأكيدُ على العمل والتعلُّمِ معاً، ومع ذلك يبقى الأفراد مسؤولين عن تعلُّمهم ومساهماتِهم الفرديَّة في المجموعة.

إنَّ إحدى الطرق التي تضمن مشاركةَ جميع طلاَّب المجموعة في الواجب تكمُنُ في تقسيم المهامِّ الوظيفيَّة بطريقةٍ يكون فيها كلُّ طالب مسؤولاً عن عملٍ أو أداءِ جزءٍ واحدٍ من العمل، بحيثُ لا يمكن أن يكتملَ واجبُ المجموعةِ إلاَّ بمشاركة كلِّ طالب بجزءٍ من الواجبِ المناطِ بها. ولتحقيقِ هدف المجموعةِ يجبُ أن يتحمَّل كلُّ فردٍ مسؤوليَّةَ البقيَّةِ لتعلُّم المفاهيم والمهارات.

يعتمدُ التَّعاونُ على التبادليَّة، ويتطلَّبُ استمرار علاقاتِ العملِ المؤثِّرة بين أعضاء المجموعة من كلِّ طالبٍ أنْ يُقدِّر قيمةَ تبادلِ المعلومات، كما ويجبُ أن يكونَ كلُّ طالبٍ مستعدَّاً للعطاء مثلما يأخذ.

ثالثاً: أساليبُ المكافأةِ (Reward structures)

توفِّر أساليبُ المكافأةِ حوافزَ إضافيَّة للسلوك التعلُّميِّ لدى المجموعة الصغيرة بين التَّلاميذ. فمثلاً، بعد أن تسلِّم المجموعاتُ واجباتِها، يتمُّ تقويمُ ناتج كلِّ مجموعةٍ على لوحةٍ يراها جميعُ التَّلاميذ. ولضمان المسؤوليَّةِ الفرديَّةِ تنالُ المجموعةُ درجةً كاملةً على نتائجها، فقط، إذا ما استطاع طالبٌ يتمُّ انتخابَه عشوائياً من إيضاحِ الحلول بصورةٍ كفوءة.

هناك عدَّة طرقٍ لتسجيل واحتساب ما تنتُجه المجموعةُ، بناءً على طبيعة الواجباتِ. حيثُ يمكنُ أن يشتملَ التسجيلُ احتسابَ عددِ الحلول الصحيحةِ، أو التَّقويم الكمِّيِّ لاستراتيجيَّةِ الحلِّ مع درجة بحرف. ويمكنُ أن تتنافسَ المجموعاتُ فيما بينها، أو تجاهدَ لتلبيةِ مقياسٍ معيَّنٍ.

ويجبُ الانتباهُ كي لا تؤدِّي هذه المنافساتُ إلى رجوعِ التَّلاميذ الضِّعاف إلى المقاعد الخلفيَّةِ أو الأدوار السلبيَّةِ، بل يجبُ أن يكونوا فعَّالين أكثرَ من الطلبة المشاركين.

يكونُ التَّلاميذ العاملونَ متلهِّفون لفحص أحدِهم الآخرَ للتأكُّد من أنَّ كلَّ فردٍ في المجموعة يفهم المادة ويتوافق مع النتائج والاستخلاصات، وهو قادرٌ على تمثيل المجموعةِ، بأن يكون المتحدِّث عنهم. ويطلبُ التَّلاميذ المساعدةَ من بعضِهم البعض في التَّوضيح، ويسألون الأسئلةَ ويجيبونَ عليها. إنَّ نوع التَّفاعلِ الكلاميِّ هو عاملٌ مهمٌّ في نجاحِ المجموعةِ.

وبهذه الأنواعِ من أساليبِ المكافأةِ يشجِّع التَّلاميذ لا ليهتموا بأنفسهم فقط وإنما ببقيَّة أعضاء المجموعة أيضاً.ويشترك التَّلاميذ في التَّعليم الرديف لأنَّ كلَّ عضو في المجموعة يجبُ أن يفهمَ المادةَ، ويدرك كلُّ طالبٍ أنَّ المجموعةَ تتوقَّع من كلِّ عضوٍ إكمالَ الواجبِ المقرَّر وأن يسهم في المجموعة، ويساعد التَّلاميذ أحدهم الآخر. ويوضح أحد التَّلاميذ مفهوماً صعباً لطالب آخر بطريقته الخاصة، ويتشارك أعضاءُ المجموعة المراجعَ والمصادرَ، ويشجِّع بعضُهم الآخرَ للمشاركة. وحتى أولئك الذين يكونون عادةً صامتين سيشعرون أنَّ المجموعةَ تعتمدُ عليهم في المشاركةِ في فعَّالياتها، وأنَّها مسألةُ (الكلُّ للفردِ والفردُ للكلِّ) لأنَّ هذا ما يجعل نجاح المجموعة ممكناً.

وفضلاً عن المكافآت الأساسيَّة التي يمارسُها أعضاءُ المجموعاتِ التَّعاونيَّةِ النَّاجحة، يمكنُ تقديمُ حوافزَ إضافيَّةٍ. فيمكن أن يُمنَحَ أعضاءُ المجموعات النَّاجحة شهادات. كذلك يُمكن وضعُ أسماء المجموعات

الناجحة على لوحة النَّشرة. ويكون التَّلاميذ متحفزين دائماً لتحسين درجاتهم، ولكنَّ مكافأةَ التَّلاميذ بهذه الطَّريقة يجب أن تتمَّ بعنايةٍ، إن إحدى الوسائل الفعَّالة هي تثمين التعاون كنسبة مئوية لدرجاتهم النهائيَّة، عندَها يمكن أن يُمنحَ أعضاءُ الفريق نقاطاً تعاونيَّةً إضافيَّةً.

رابعاً: المعالجة الفرقية (Group processing)

على المعلِّم مساعدةُ التَّلاميذ ليدركوا أنَّ المجموعةَ كي تعملَ بصورةٍ جيِّدة، لا بُدَّ للأعضاء أن يشعروا بالحريَّة في التَّعبير عن آرائهم والسُّؤال وتوضيح الاختلافات. وهكذا، لابد أن يتمَّع كلُّ شخص بالصَّبر وضبط النفس. وإذا ما تمَّت مناقشة الأفكار كلِّها، حينها فلا بُدَّ أن يرغب أعضاءُ المجموعة بالموازنةِ ، إن الاتِّفاق قد يكون صعباً وليس غالباً ما يتحقق بسبب تجارب التَّلاميذ التَّعليمية السَّابقة.

وليس غريباً أن تنشأ الاختلافاتُ والتبايناتُ حتَّى ولو كانتِ المجموعةُ تعملُ بشكلٍ تعاونيٍّ. ويحتاج أعضاءُ المجموعةِ إلى المهارات لمعالجة مثلِ هذه النزاعات. كما ويجب على المعلِّمين مساعدةُ التَّلاميذ في فهم حقيقةِ أنَّ أعضاءَ المجموعةِ ينبغي أن يكونوا ناقدين للأفكارِ وليس للناس. وعليهم أن يفهموا أنَّ النزاعَ أو الاختلافَ يقوِّي الفهمَ، ويساعدَ المجموعةَ في الوصول إلى الإجماع. كما ينبغَّي كذلك أنْ يتعلَّموا أهميَّةَ الإنصاتِ لما يقوله أعضاءُ المجموعاتِ الأخرى ، وفهم الأفكارِ التي لا يتِّفقُون معها. إنَّ مثلَ هذه المهاراتِ في إدارة الخلافاتِ مهمَّةٌ جدَّاً لعمل أيَّةِ مجموعة.

وعلى المعلِّمين أن يراقبوا المجموعات في تقدِّمها، ويقدِّموا النُّصحَ والإرشادَ متى كان ذلك ضروريَّاً. وعندَما يكون أداءُ المجموعةِ ضعيفاً، فيجبُ أن يتدخَّل المعلِّمُ لمساعدة التَّلاميذ بالمهارات التي يحتاجونها. ومتى تمَّ تشخيصُ هذه المهاراتِ ومناقشتُها، فسيرى المعلِّم كيفيَّة أداء المجموعة وإذا كانت تعمل بفاعليَّةٍ أكبر.

يجب أن يوفِّرَ المعلِّم التغذيةَ الرَّاجعةَ، لكي يعلِّم التَّلاميذ مدى إجادةِ أدائِهم. ويمكن أن يطلُبَ المعلِّم من المجموعة أن تراقب أداءَها من خلالِ الإجابة على الأسئلةِ التي تتعلَّق بسلوك وعملِ المجموعة. هل يشاركُ كلُّ عضوٍ في العمل؟ وهل يتعاونُ التَّلاميذ فيما بينهم؟ وهل يديرون ويعالجون الخلافاتِ بصورةٍ جيِّدةٍ؟

دورُ المعلِّم في إدارة تعلُّم المجموعةِ الصَّغيرةِ:

يلعبُ المعلِّمُ دوراً حيويَّاً في تحقيق تعلُّم المجموعة الصَّغيرة الفاعل. وقبل أن يطلبَ إلى التَّلاميذ العملَ في مجموعاتٍ، يجب أن يعطي المعلِّم توضيحاً حول الواجبِ، والوقتِ المخصَّصِ للنشاط، والتَّطلعات التَّعليميَّة للمجموعة، والسلوكيَّات التعاونيَّة المرجوَّة، والخطوات التي يجب اتباعها، وبيان نجاح المجموعة.

وعلى المعلِّم، كمدير للصف، أن ينتبه إلى أنَّ الصَّفَ منظمٌ بطريقةٍ تضمنُ تقاربَ أعضاءِ المجموعةِ بما يكفي للعملِ سويَّةٍ وبراحةٍ تامَّةٍ. ويجبُ أن تكون المجموعات منفصلةً عن بعضِها كي لا تتداخل فيما بينها.

كيفيَّة دمجِ تعلُّم المجموعة الصغيرة بدرس الرياضيَّات:

اختبار تمهيدي/مراجعة: يناسبُ تركيبُ المجموعةُ التَّلاميذ لمساعدة بعضهم البعضِ للتَّحضير للاختبار، ويمكنُ تخصيصُ اختبارِ عيّنةٍ للواجب البيتيِّ، عندها يلتقي التَّلاميذ في مجموعاتٍ ليناقشوا الاختبارَ العيّنةَ ويعمِّقوا فهمَهم للمفاهيم والأساليب التي سيختبرون بها. وبالعمل على الاختبار العينيِّ بشكلٍ فرديٍّ، يأتي كلُّ طالبٍ إلى نقاشِ المجموعةِ بصورةٍ دقيقةٍ عن فهمِه. إنَّ التَّلاميذ قادرون على تحضير أنفسهم وأعضاء المجموعة الآخرون للاختبار القادم. ومرة أخرى، تتَّفق كلُّ مجموعةٍ على حلول المسائل ويسلِّمون ورقةَ مجموعةٍ واحدة. ويعطي المعلِّم كلَّ الصفِّ ما يكفي من الوقتِ لمناقشةِ تلكَ النَّواحي التي تحتاجُ للإيضاحِ.

ومن الضَّروريِّ كذلكَ أنْ يحدث التَّعلم بعد أن يُراجَع الاختبار! ويستطيعُ أعضاءُ المجموعةِ أن يساعدوا بعضَهم البعض لفهمِ وتصحيحِ الأخطاءِ. وقد يُمنَح التَّلاميذ الفرصةَ كذلك لإعادة تسليمِ المسائل التي حدث فيها الخطأُ، بشرط أن يحلُّوا كل مسألةٍ بصورةٍ صحيحةٍ، وأن يوضِّحوا لماذا كانت حلولهم الأصليَّة خطأ، وأن يعطوا حلَّهم الجديدَ تبريراتٍ بإعطائهم إيضاحاً مكتوباً للعمليَّات الفرديَّة التي استخدموها.

يمكن لهذا الأسلوب أن يوازنَ التفاعلَ الطبيعيَّ للعديد من التَّلاميذ، والذين كانوا سيقبلونَ الخطأ الماضي، فقط للتحرُّك قدماً للمهمة المقبلة، حيث تنتظرُهم (مهمّةٌ نظيفةٌ). يمكن حينها أخذُ الاختبارات بالحسبان وأن تكونَ الدرجةُ النهائيَّةُ بأخذ معدَّلٍ متوازنٍ لدرجاتِ الاختبار الأوَّل والثَّاني. وربّما يمكن استخدام الاختبارُ الأوَّلُ كثلث الدرجة والثاني كثلثين.

الإثراء (enrichment)

يُعدُّ العملُ الجماعيُّ طريقةً ممتازةً لدمج خبرات الإثراءِ في درس الرياضيَّات، ولتحفيز اهتمام الطالب في موضوعٍ جديدٍ، يمكنُ أن تبحثَ مجموعاتٌ تعلُّميّةٌ صغيرةٌ في التطوّراتِ التاريخيَّة للموضوع. ويجب على أعضاءِ المجموعة تقسيم العمل بينهم. فمثلاً يمكن أن يبحث أحد التَّلاميذ في تاريخ بداية الموضوع، ويكونُ الآخر مسؤولاً عن بيان الرياضيِّين الذين كان لهم دورٌ فاعلٌ في تطوُّرِ الموضوع. وربّما تحتاجُ المجموعةُ لشخصٍ يبحثُ في النوادر والحوادث التي لها علاقةٌ بالموضوع، وأخيراً ، قد يكون ممتعاً لأحد التَّلاميذ أن يبحث في كيفيَّةِ تأثير معرفة هذا الموضوع على العالم. ويمكنُ وضع المشروع هذا على اللَّوحة الجداريَّة الدوريَّة.

تحضير الدّرس لمُدرِّس الصّف

1) **منظِّم الدّرس**:

- أهداف الدّرس.
- مُستلزمات الدّرس.
- المُفردات والمصطلحات الجديدة.

2) **سير الدّرس**:

a) **التّمهيد**: ويتضمّن إحدى النّقاط الآتية على الأقل:

- **صِلة الدّرس**: ربط الدّرس الجديد بما سبق.
- **التّهيئة والتّحفيز**: الإجراءات التي تجعل الطّالب مُستعدّاً للبدء في الدّرس الجديد.
- **التّذكير**: الإجراءات التي تُذلِّل الصّعوبات المتوقّعة أمام التّعلُّم الجديد.

b) **التّدريس**:

- **التّعليم والتّعلُّم**: تحديد وتنفيذ استراتيجيّات التّعليم والتّعلُّم لتحقيق الهدف التّعليمي المطلوب.
- **التّطبيق**: حلّ مّشكلة (سؤال أو مسألة) بهذا التّعلُّم.
- **الأخطاء المتوقّعة**: يّنبّه على الأخطاء التي يمكن أن يقع بها الطّالب في هذا التّعلُّم وكيفية معالجتها.
- **التّقويم المرحلي**: مجموعة الأسئلة التي تُطرح على الطّلاب للتّأكُّد من تحقيق الهدف التّعليمي.

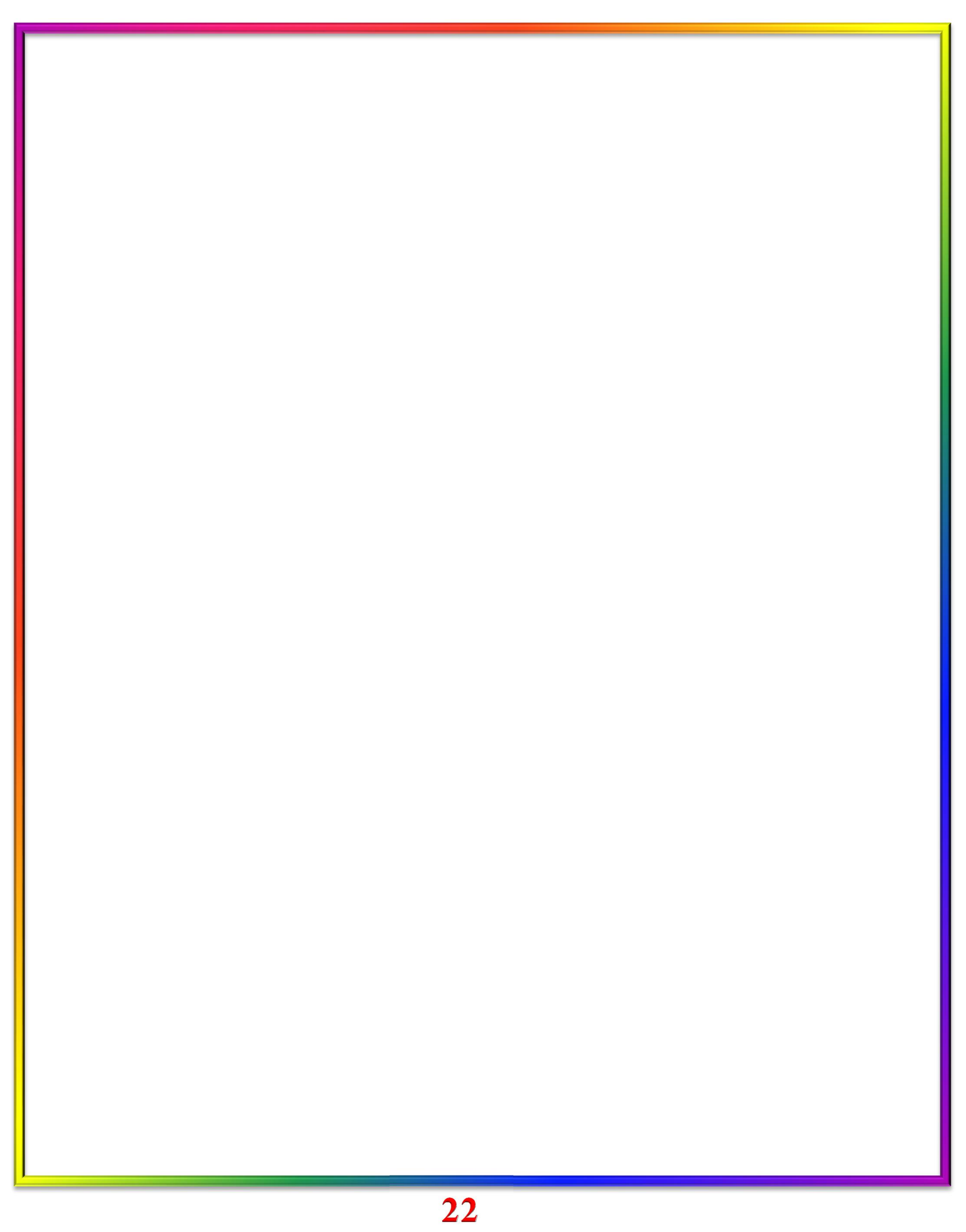
c) **الخاتمة والتّقييم**:

- **التّحقق من الفهم**: مجموعة الأسئلة للتأكُّد من تحقيق أهداف الدّرس.
- **الواجب المنزلي**: مجموعة التدريبات والأنشطة التي تُعطى كواجب منزلي لتعميق العمليّة التّعليميّة بمعدّل تمرين أو تمرينين فقط.

ملاحظة:

المدرس مُلزم بحل تمارين الوحدة كاملة وغير مُلزم بحل جمع تمارين كتاب الأنشطة والتدريبات.

فهـــــرس دليـــــل الهندســـــة



مُبرهنـــــــــة تـــــــالس في الُمثلّـــــــث

مُنظِّم الدّرس (2 – 3)

أهداف الدّرس

التعرف على مبرهنة تالس في المثلث

المفردات والمصطلحات الجديدة

مبرهنة تالس في المثلث

مُستلزمات الدّرس

كتابي الطالب والأنشطة – مسطرة مدرجَّة السبورة

ســـــــير الــــــــدّرس

التّمهيـــــــــد

صلة الدّرس: تعلمنا مُبرهنة تالس بشكل عام وسنتعلم مُبرهنة تالس في المُثلّث.

التّـــــــدريس

- اكتب نص مُبرهنة تالس في المُثلّث على السبورة.
- اطلب من مجموعات العمل رسم الشّكل الموافق للمُبرهنة وكتابة الفرض والطلب.
- ما أقل عدد من المستقيمات المتوازية يلزم لتطبيق مُبرهنة تالس؟ ج ثلاثة على الأقل.
- هل هذا العدد من المستقيمات المتوازية متوفر في الشّكل الذي رسمته؟ ج لا.
- اطلب من المجموعات رسم المستقيم الثالث المناسب للطلب.
- بعد التّوصل للرّسم المُناسب اطلب من المجموعات تطبيق مُبرهنة تالس

نكون بذلك قد توصَّلنا لإثبات صحة مُبرهنة تالس في المُثلّث.

- اطلب من أحد الطّلاب مراجعة خطوات البُرهان.
- حل التّطبيق الصفحة 16 على السّبورة.
- اطلب من مجموعات العمل تنفيذ حاول أن تحل ① كتقويم مرحلي.
- نفّذ النّشاط المُتعلّق بتقسيم قطعة مستقيمة بنسبة معلومة اعتماداً على تالس في المُثلّث

وكلّف الطّلاب بحل (حاول أن تحل صفحة 17) كتقويم مرحلي.

الخاتمـــة والتّقيـــيم

تحقّق من فهمك:

في الشّكل المرسوم جانباً: هل $\frac{NC}{MB} = \frac{AN}{AM}$ ؟



الواجب المنزلي: حاول أن تحل 3, 2 في كتاب الطّالب ورقم (3) من تمارين الدّرس في كتاب الأنشطة.



الوحـــــــــــــــدة الأولى



المســـتقيمات المتوازيـــة والقواطـــع

محتوى الوحدة

- خواصُّ التّناسب.
- مبرهنةُ تالس وعكسُها.
- مبرهنةُ تالس في المثلّث وعكسُها.
- المثلّثات المتشابهةُ والقياس غيرُ المباشر.

تُستخدَمُ خواصُّ التّناسب في البراهين الرياضيّة، وفي حلّ مسائلَ حياتيّةٍ تتضمّن علاقاتِ تناسب.

و تُستخدَمُ مبرهنةُ تالس في حساب الأطوال، وإنجاز البراهين الرياضيّة وفي إنشاءات هندسيّة بسيطة، كما تستخدم في مخطّطات المدن.

ويعتمدُ القياس غيرُ المباشر على التشابه عبر كتابة التناسبات بين الأطوال، ثُمَّ إيجادها كما يستخدمُهُ الفلكيّون والمهندسون والجيولوجيون في حساب أبعاد لا يمكنُ الوصول إليها.

1 - 1 خـــواصُ التناســـب وتطبيقاتُـــه

سوف تتعلّم

- بعض خواصّ التّناسب.
- استخدام خواصّ التّناسب.

نشاط

أوجدْ قيمةَ x في كلٍّ من التّناسبين: $\frac{x}{2} = \frac{1}{4}$ ، $\frac{x-2}{3} = \frac{x}{5}$

الحل:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{x}{5}$$
$$(x-2)5 = x \times 3$$
$$5x - 10 = x \times 3$$
$$5x - 3x = 10$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{4}$$
$$x \times 4 = 2 \times 1$$
$$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

تذكر

1. في التّناسب $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ أربعة حدود غير معدومة هي:
   a , d طرفا التّناسب
   c , b وسطا التناسب
2. في أيّ تناسب جداء الطّرفين يساوي جداء الوسطين وتدعى هذه الخاصة خاصة الضرب التقاطعي.
3. يمكن التحقق من صحة التّناسب الذي حدوده غير معدومة باستخدام خاصّة الضّرب التّقاطعي.

أوّلاً خـــــــواصّ للتّناســـــــب

نشاط

لدينا التّناسب $\frac{20}{5} = \frac{8}{2}$، تحقّق أنّ النّسبتين $\frac{20}{8}$ ، $\frac{5}{2}$ تُشكِّلان تناسباً.

كيف حصلنا على التّناسب الثّاني من الأوّل ؟

تعلّم

- إذا بادلنا في تناسب بين الطرفين نحصلُ على تناسب جديد.
- إذا بادلنا في تناسب بين الوسطين نحصلُ على تناسب جديد.

نشاط

- لدينا التّناسبُ $\frac{36}{21} = \frac{12}{7}$

تحقّق أنّ النّسبتين $\frac{36+21}{21}$, $\frac{12+7}{7}$ متساويتان أي $\frac{57}{21}, \frac{19}{7}$ تُشكّلان تناسباً.

كيف حصلنا على التّناسب الثّاني من الأوّل ؟

- لدينا التّناسب $\frac{-1.8}{3} = \frac{-3}{5}$.

تحقّق أنّ النّسبتين $\frac{-1.8}{3+(-1.8)}$, $\frac{-3}{5+(-3)}$ متساويتان أي $\frac{-1.8}{1.2}, \frac{-3}{2}$ تُشكّلان تناسباً.

كيف حصلنا على التّناسب الثّاني من الأوّل ؟

تعلّم

- في كلّ تناسب إذا ثبّتنا المقامين وجمعنا كلّ مقام إلى البسط الموافق نحصلُ على تناسب جديد.
- في كلّ تناسب إذا ثبّتنا البسطين وجمعنا كلّ بسط إلى المقام الموافق نحصلُ على تناسب جديد (على ألا يكون المقام معدوماً).

ملاحظة

يمكنُ برهانُ الخاصّة كما يأتي:

لدينا التّناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

ومنه $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$

أي $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

ثانياً تطبيقـــــــــــــــــــــات

1- تطبيق هندسيّ

في الشّكل المجاور $AB = 10$ ، $\frac{NA}{NB} = \frac{2}{3}$ أوجد NA , NB.

B
N
A

الحلّ

نثبّتُ مقامَي التّناسب ونجمعُ كلّ مقام كسر إلى بسطه نحصل على $\frac{2+3}{3} = \frac{NA+NB}{NB}$

نعوّض، نجد $\frac{5}{3} = \frac{10}{NB}$ ومنه $NB = 6$ و $NA = 10 - 6 = 4$

2- تطبيقٌ حياتيٌّ

نتيجةَ حملات التّوعية التي تقوم بها الدولةُ انخفضَ عددُ المُدخّنين بشكل ملحوظ

وفي إحصائيّة لعيّنة عشوائيّة شملت 2420 شخصاً في إحدى المدن السورية

ممّن أعمارهم تتراوح بين (20 – 60) سنة

كانت نسبةُ عدد المُدخّنين إلى عدد غير المُدخّنين $\frac{2}{9}$

كم عدد المُدخّنين وكم عدد غير المُدخّنين الذين شملَهم الإحصاء ؟

الحلّ

إذا كان عددُ المُدخّنين x وعددُ غير المُدخّنين y ومنه $\frac{x}{y} = \frac{2}{9}$ أي $\frac{x}{y+x} = \frac{2}{9+2}$ وبالتّالي $\frac{2}{11} = \frac{x}{2420}$

إذن $x = 440$ وهو عددُ المدخّنين الذين شملهم الإحصاء.

$y = 2420 - 440 = 1980$ وهو عدد غير المدخّنين الذين شملهم الإحصاء.

حاول أن تحلّ (تطبيقٌ هندسيٌّ)

المُثلّث ABC قائمُ الزّاوية في A وَ $\frac{B}{C} = \frac{2}{3}$

أوجدْ B, C .

الحلّ

$\frac{B}{C} = \frac{2}{3}$ ومنه $\frac{B}{C+B} = \frac{2}{3+2}$ إذن: $\frac{B}{90^\circ} = \frac{2}{5}$

ومنه: $B = 36^\circ$ و $A = 54^\circ$

تذكر

- نُرمّز قياسات زوايا المثلّث ABC بالرّموز A , B, C
- مجموع قياسات زوايا أيّ مثلّث 180°

2 - 1 مُبرهنـــــة تـــــالس وعكســـــها



سوف تتعلّم

- مُبرهنة تالس واستخداماتها.
- مُبرهنة العكس لمُبرهنة تالس واستخداماتها.

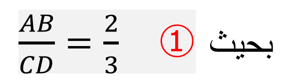
أوّلاً مُبرهنـــــة تـــــالس واســـــتخدامها

نشاط

في الشّكل المرسوم جانباً:

لدينا المستقيماتُ المتوازيةُ d_1, d_2, d_3, d_4

المستقيم L قاطع لها في النقاط على الترتيب A, B, C, D



بحيث ① $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$

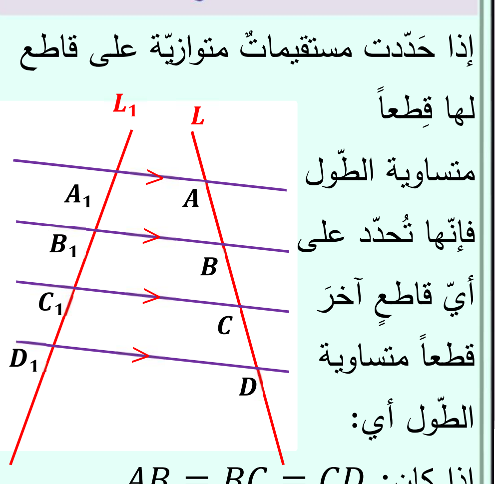
والمستقيم L_1 قاطع لها في النّقط A_1, B_1, C_1, D_1 على ذات التّرتيب السّابق، نقسم $[AB]$ إلى قطعتين متساويتي الطّول، عندها يمكن تقسيم $[CD]$ إلى ثلاث قطع متساوية، ومساوية في الطّول للقطعتين السّابقتين، نرسم من نقط التّقسيم مستقيماتٍ موازيّةً للمستقيم d_1

فيكون: $A_1N = NB_1 = C_1M = ME = ED_1$ لماذا ؟

وبالتالي يكون ② $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{2}{3}$

تذكر

إذا حَدّدت مستقيماتٌ متوازيّة على قاطع لها قِطعاً متساوية الطّول فإنّها تُحدّد على أيّ قاطعٍ آخرَ قطعاً متساوية الطّول أي:



إذا كان: $AB = BC = CD$

فإنّ: $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1$

من ① و ② نجد $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{CD}$ وبالمبادلة بين وسطي التّناسب نجد $\frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$

لاحظِ التّقابل: $[AB]$ من القاطع L يقابلها $[A_1B_1]$ من القاطع L_1 و $[CD]$ من القاطع L يقابلها $[C_1D_1]$ من القاطع L_1 فالبسطان من قاطع، والمقامان المقابلان لهما من قاطع آخر.

وبشكل مماثل يمكن أنّ نكتب $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$

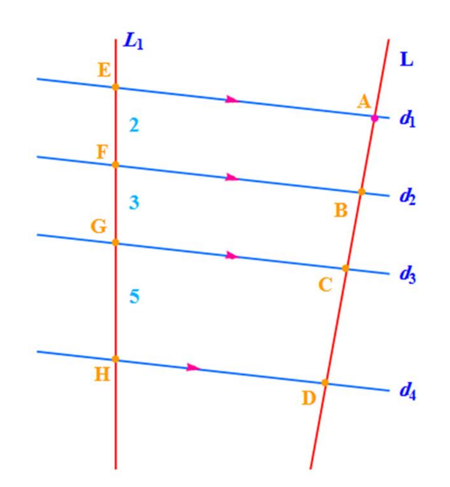
وبالتّالي نستنتج أنّ: $\frac{BD}{......} = \frac{AC}{......} = \frac{......}{C_1D_1} = \frac{CB}{......} = \frac{AB}{A_1B_1}$

تعلّم

مُبرهنة تالس (تقبلُ من دون برهان)

المستقيمات المتوازية تحدّد على أيّ قاطعين لها قطعاً متقابلة أطوالُها متناسبة.

تطبيق



في الشّكل المرسوم جانباً: $AD = 8$

1. ما مقابلات كل من: $[AB], [HG], [DA]$؟
2. احسبْ كلاً من: AB , CD

الحل

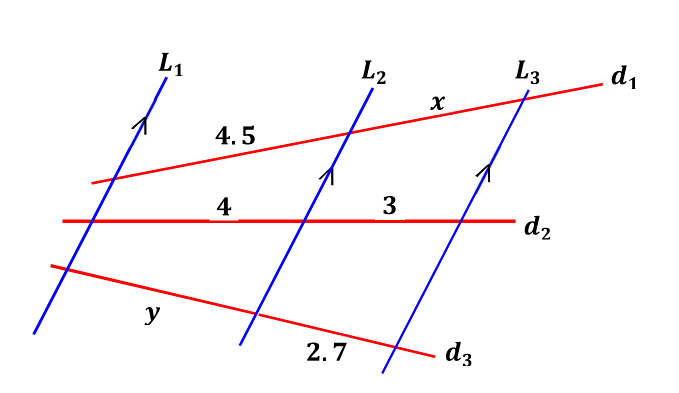
1. $[AB]$ تُقابِل $[EF]$، $[HG]$ تُقابِل $[DC]$ ، $[DA]$ تُقابِل $[HE]$
2. حسب تالس نجد:

$\frac{DA}{HE} = \frac{CD}{GH}$ بالتّعويض: $\frac{8}{10} = \frac{CD}{5}$ ومنه $CD = 4$



وبذات الطّريقة نجد $AB = 1.6$

حاول أن تحلّ



في الشّكل المرسوم جانباً: أوجد كلاً من x , y.

الحل



$\frac{4.5}{4} = \frac{x}{3}$ ومنه: $x = 3.375$

$\frac{2.7}{3} = \frac{y}{4}$ ومنه: $y = 3.6$.

ثانياً مُبرهنـــة العكـــس لمُبرهنـــة تـــالس[1]

إذا عيّنت ثلاثة مستقيمات، اثنان منها متوازيان على قاطعين لها قطعاً متقابلة أطوالُها متناسبةٌ كانت المستقيمات الثّلاثة متوازية.

الفرض: $d_1\,,d_2\,,d_3$ ثلاثة مستقيمات بحيث $d_1 /\!/ \ d_2$

L قاطع لها في A, B, C على الترتيب

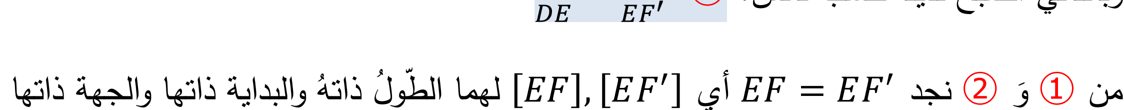
L_1 قاطع لها في D, E, F على الترتيب و ① $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

الطلب: $d_1 /\!/ \ d_2 /\!/ \ d_3$

البرهان: إذا لم يكن d_3 موازياً للمستقيم d_1

نرسم مستقيماً مارّاً من C وموازياً للمستقيم d_1 فيقطع L_1 في F'

وبالتّالي أصبح لدينا حسب تالس: ② $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF'}$


من ① وَ ② نجد $EF = EF'$ أي $[EF], [EF']$ لهما الطّولُ ذاتهُ والبداية ذاتها والجهة ذاتها

فنهايتاهما منطبقتان أي أنّ F' تنطبق على F،

وبالتّالي المستقيمان $(CF'), (CF)$ طبوقان لاشتراكهما في نقطتين مختلفتين هما C, F'

وبما أنّ $(CF') /\!/ \ d_1$ عملا فإنّ $(CF) /\!/ \ d_1$ ومنه $d_1 /\!/ \ d_2 /\!/ \ d_3$.

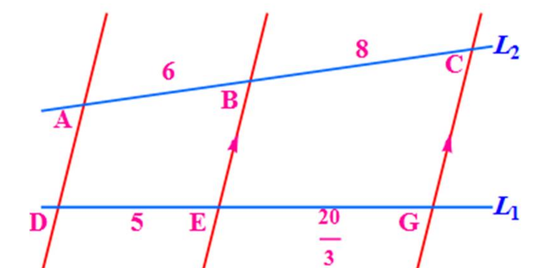
---

1 تُعتبر مُبرهنة العكس لمُبرهنة تالس صحيحةً إذا تحّقق الشّرطان:

أ. ألّا يمرّ d_3 من نقطة تقاطع L وَ L_1.

ب. أنْ تحافظَ النّقطُ على البينيّة في الشّكل أعلاه النّقطة B وقعت بين النّقطتين $A\,, C$ على القاطع L والنّقطة E (مقابلة B) وقعت بين النّقطتين $D\,, F$ مقابلتي النّقطتين $A\,, C$ على الترتيب على القاطع L.

تطبيق



في الشّكل المرسوم جانباً: $(GC) \parallel (EB)$

- أوجد كلاً من: $\frac{AB}{DE}$, $\frac{BC}{EG}$
- استنتجْ أنّ: $(GC) \parallel (EB) \parallel (DA)$

الحل

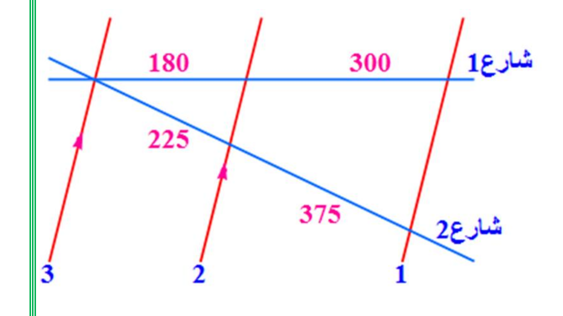
$$\frac{AB}{DE} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{BC}{EG} = \frac{8}{\frac{20}{3}} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$$

بالمقارنة نجد: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EG}$ وبما أنّ $(GC) \parallel (EB)$ فرضاً

فحسب مُبرهنة العكس لتالس نجد $(GC) \parallel (EB) \parallel (DA)$

حاول أن تحلّ



في الشّكل المرسوم جانباً:

برهن أنّ الطُّرق 3 , 2 , 1 متوازيةً (المسافات على الرسم مقدّرة بالمتر)

الحل

$$\begin{cases} \frac{225}{180} = \frac{5}{4} \\ \frac{375}{300} = \frac{5}{4} \end{cases}$$
بما أنَّ: $\frac{375}{300} = \frac{225}{180}$

فحسب عكس تالس الطُّرق 1,2,3 متوازية.

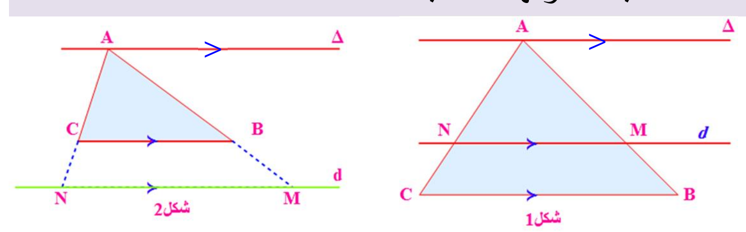
1 - 3 مُبرهنـــــــة تـــــــالس في المُثلـــــــث

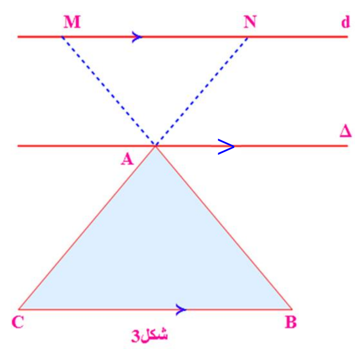
سوف تتعلّم

- مُبرهنة تالس في المثلّث واستخداماتها.
- مُبرهنة العكس لمُبرهنة تالس في المثلّث واستخداماتها.
- خاصة مركز ثقل المثلّث.

أوّلاً مبرهـــــــة تـــــــالس في المثلـــــــث

المستقيم الموازي لإحدى أضلاع مُثلّث، ولا يمرّ بالرأس المقابلة لتلك الضّلع يُحدِّد على الضّلعين الباقيتين أو على امتدادهما قطعاً متقابلة أطوالها متناسبة.

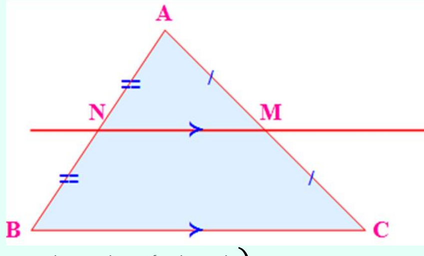




الفرض: ABC مُثلّث، والمستقيمُ d يوازي $[BC]$ وقاطعٌ للضّلعين $[AB], [AC]$ (شكل1) أو قاطع لامتدادهما من جهة C, B (شكل2) أو قاطع لامتدادهما من جهة A (شكل3) في M, N على الترتيب.

تذكر

1. المستقيم المار بمنتصفي ضلعين في مُثلّث يوازي الضّلع الثّالثة.
2. طول القطعة المستقيمة المحدّدة بمنتصفي ضلعين في مُثلّث يساوي نصف طول الضّلع الثّالثة.



N منتصف $[AB]$ و M منتصف $[AC]$ إذن $(NM) \parallel (BC)$ و $NM = \frac{1}{2} BC$

3. المستقيم المارّ بمنتصف ضلع في مُثلّث موازياً لضلع أخرى يمرّ بمنتصف الضّلع الثّالثة.

N منتصف $[BC]$ و $(NM) \parallel (AB)$ إذن M منتصف $[AC]$

الطلب: برهن أنّ $\frac{MB}{NC} = \frac{AM}{AN}$

البرهان: نرسمُ المستقيمَ Δ مارّاً من A وموازياً لـ $[BC]$

أصبح لدينا $d /\!/ \Delta /\!/ (BC)$ ، $(AB)\,,(AC)$ قاطعين لها،

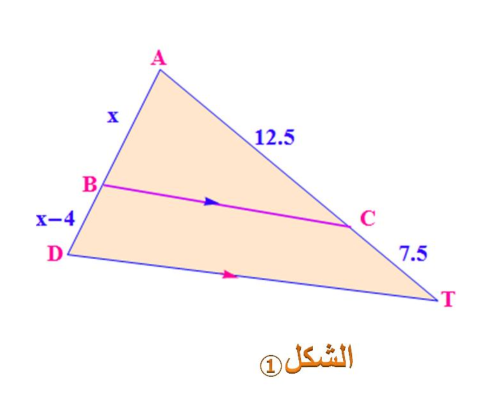
فحسب تالس نجد: $\frac{MB}{NC} = \frac{AM}{AN}$ وهو المطلوب.

ملاحظة

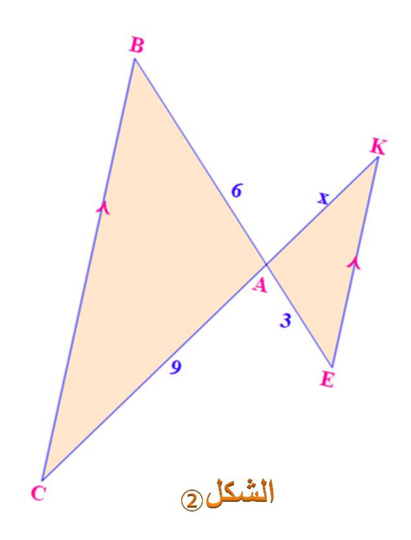
يُكتفى برسم شكل واحد فقط والبرهنة عليه.

تطبيق ①

احسب x في كلّ من الشّكلين الآتيين:



الشكل①



الشكل②

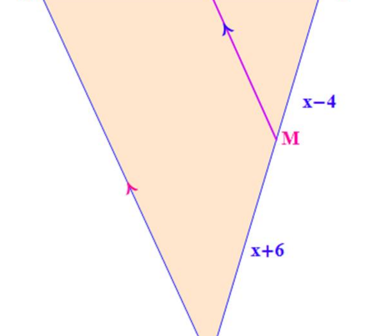
الحل

في **الشّكل①** وحسب تالس في المُثلّث نجد: $\frac{x-4}{7.5} = \frac{x}{12.5}$ ومنه $5\,x = 50$ أي $x = 10$

في **الشّكل②** وحسب تالس في المُثلّث نجد: $\frac{9}{6} = \frac{x}{3}$ ومنه $x = 4.5$

حاول أن تحلّ

1. في الشّكل المرسوم جانباً: احسب x.



الحل

$\frac{x-4}{4} = \frac{x+6}{9}$ ومنه: $5x = 60$ ومنه $x = 12$

2. $\overset{\Delta}{ABC}$ مُثلّث متساوي السّاقين رأسه A

$MC = 3\,,BC = 4\ ,\ AC = 6$

- قارنْ بين $\frac{CM}{CB}$, $\frac{AF}{AB}$
- قارنْ بين $\frac{CM}{CB}$, $\frac{CE}{CA}$
- استنتجْ أنّ $AF = CE$ واحسبْ AF.



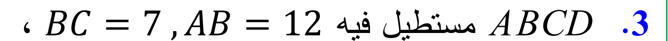
الحل

حسب تالس في المثلث: $\frac{AB}{CB} = \frac{AF}{CM}$ ومنه $\frac{CM}{CB} = \frac{AF}{AB}$ ....❶

وحسب تالس في المثلث: $\frac{CA}{CB} = \frac{CE}{CM}$ ومنه $\frac{CM}{CB} = \frac{CE}{CA}$ ....❷

من ❶ و ❷ نجد: $\frac{CE}{CA} = \frac{AF}{AB}$ وبما أنّ $AB=AC$ ومنه $AF=CE$

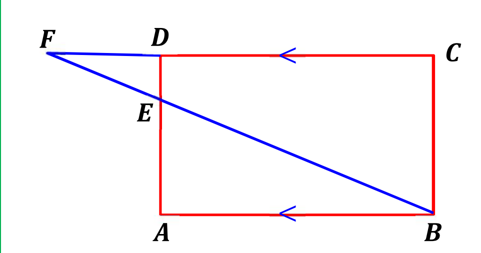
من ❶ نجد: $\frac{3}{4} = \frac{AF}{6}$ ومنه $AF=\frac{9}{2}$



3. $ABCD$ مستطيل فيه $AB = 12\,, BC = 7$ ،

E نقطة من $[AD]$ بحيث $AE = 5$, $[BE)$ يقطع $(CD]$ في F

- احسب BE ثُمَّ EF.



الحل

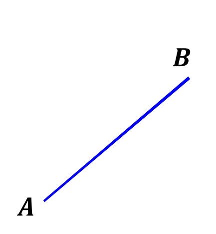
حسب فيثاغورث في المثلث EAB نجد $BE = 13$

وحسب تالس نجد: $\frac{FE}{ED} = \frac{EB}{AE}$ ومنه $\frac{FE}{2} = \frac{13}{5}$ ومنه: $FE = 5.2$

تطبيق هندسي

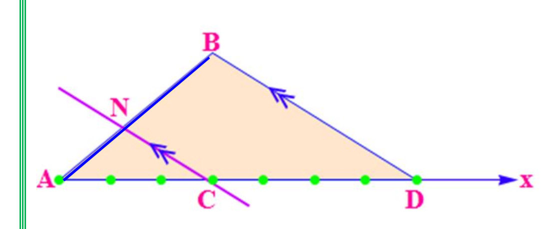
لدينا القطعةُ المستقيمةُ $[AB]$ المرسومة جانباً ونريد تعيينَ النّقطة $N \in [AB]$

بحيث $\frac{3}{4} = \frac{NA}{NB}$ حسب تالس في المُثلّث.



خطوات العمل:

- نرسم من أحد طرفي $[AB]$ وليكن A مثلاً نصف المستقيم $[Ax)$
  بحيث $[AB]$ لا تقع على حامل $[Ax)$
- نُعيِّن على $[Ax)$ نقطة C بحيث $AC = 3$
- نُعيِّن على $[Cx)$ نقطة D بحيث $CD = 4$
- نكمل رسم المُثلّث ABD
- نرسم مستقيماً مارّاً بـ C وموازياً لـ (BD) فيقطع $[AB]$ في نقطة،
  برهن أنّ هذه النّقطة هي N اعتماداً على مُبرهنة تالس في المُثلّث.

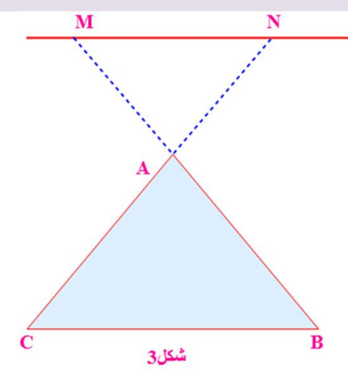


حاول أن تحلّ

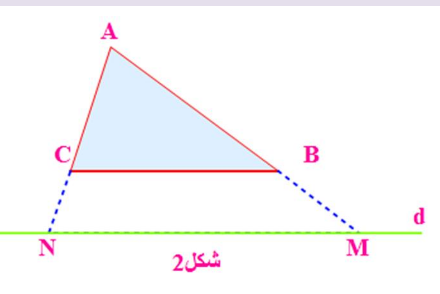
ارسم قطعةً مستقيمةً $[AB]$ بحيث $AB = 6$ ثُمَّ عيّن النّقطةَ $K \in [AB]$ بحيث $\frac{KA}{KB} = \frac{2}{5}$.

ثانياً مُبرهـــــنة العكـــــس لمُبرهنـــــة تـــــالس في المُثلّـــــث

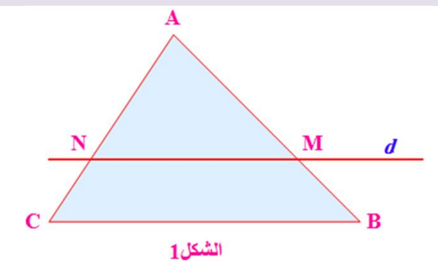
إذا عيّنَ مستقيمٌ على ضلعين في مُثلّث أو على امتدادهما من جهة الرأس المشترك لهما، أو على امتدادهما من الجهة الأخرى، قطعاً متقابلة، أطوالها متناسبةٌ كان هذا المستقيمُ موازياً للضلع الثّالثة.



شكل3



شكل2



الشكل1

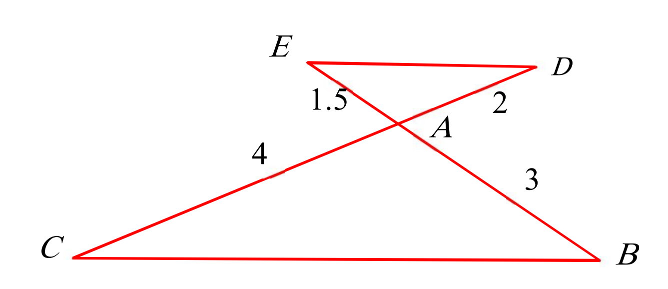
الفرض: في الأشكال الثّلاثة المرسومة أعلاه ABC مُثلّث،

المستقيم d يقطع الضّلعين $[AB], [AC]$ أو امتدادَهما في M,N على الترتيب و $\frac{AM}{AN} = \frac{MB}{NC}$.

الطلب: $d \parallel [BC]$.

البرهان: " تُقْبَلُ من دون برهان ".

تطبيق①



تأمّل الشّكل المجاور ثُمَّ برهن أنّ $(ED) \mathbin{/\!/} (CB)$

الحل

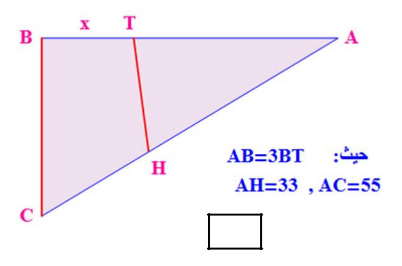
إنّ $\frac{AD}{AE} = \frac{2}{1.5} = \frac{4}{3}$

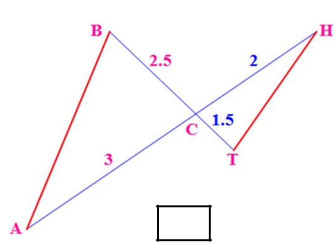
كما أنّ $\frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}$

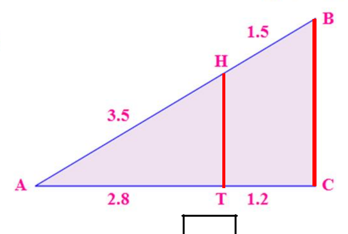
نستنتج أنّ $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$ وحسب مُبرهنة العكس لتالس في المُثلّث نجد: $(ED) \mathbin{/\!/} (CB)$

تطبيق②

في الأشكال الآتية مستقيماتٌ لُوِّنَتْ بالأحمر، ضع الإشارة ✓ تحت الشّكل ذي المستقيمات الحمراء المتوازية مع التّعليل.







في الشكل الأول: $\frac{5}{4} = \frac{HA}{TA} = \frac{HB}{TC}$ وبالتالي المستقيمين الملونين باللون الأحمر متوازيين.

في الشكل الثاني: $\frac{AC}{BC} \neq \frac{HC}{TC}$ لأنَّ: $\frac{3}{2.5} \neq \frac{2}{1.5}$ أيّ أنّ المستقيمين الملونين باللون الأحمر غير متوازيين.

في الشكل الثالث: $\frac{2x}{33} = \frac{AT}{AH}$ و $\frac{x}{22} = \frac{BT}{CH}$.

$\frac{BT}{CH} \neq \frac{AT}{AH}$ أيّ أنّ المستقيمين الملونين باللون الأحمر غير متوازيين.

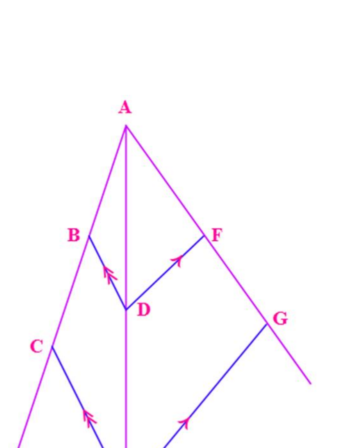
حاول أن تحلّ

1. في الشّكل المجاور: $DE = 2x - 3$ ، إذا كان $[CD] /\!/ [BE]$
فأوجد DE

الحل

$\frac{3}{2} = \frac{2x-3}{6}$ ومنه: $4x - 6 = 18$ ومنه $x = 6$

2. في الشّكل المجاور:
برهن أنّ $(GC) /\!/ (FB)$



الحل

لدينا: $\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$ ومنه $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} \cdots$ ❶

كما أنَّ: $\frac{FG}{DE} = \frac{AF}{AD}$ ومنه $\frac{AF}{FG} = \frac{AD}{DE} \cdots$ ❷

من ❶ و ❷ نجد: $\frac{AF}{FG} = \frac{AB}{BC}$ أي أنّ $\frac{AB}{AF} = \frac{BC}{FG}$

وحسب عكس تالس في المثلث نجد: $(BF) /\!/ (GC)$

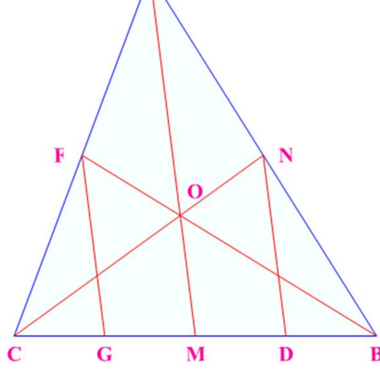
ثالثاً خاصّــــة مركـــز ثقـــل مثلـــث

نشاط

ارسم مُثلّثاً ABC ثُمَّ ارسم المتوسّطاتِ الثّلاثةَ للمُثلّث

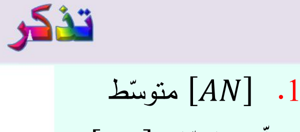
كما في الشّكل المجاور

ارسم من N موازياً للمستقيم (AM) فيقطع $[MB]$ في D إنّ D منتصف $[MB]$ {علِّل}



تذكر

1. $[AN]$ متوسّط متعلّق بالضّلع $[BC]$ لأنّ N منتصف $[BC]$.



2. المتوسطات الثلاثة في المُثلّث تلتقي في نقطة واحدة تقع داخله تُسمّى مركزَ ثقل المُثلّث

كذلك ارسمْ من F موازياً للمستقيم (AM) فيقطع $[CM]$ في G إنّ G منتصف $[CM]$ {علِّل}

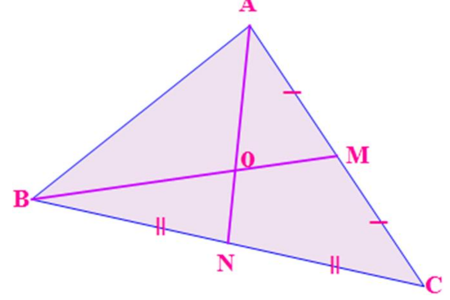
أصبح لدينا: $CG=GM=MD=DB$ وحسب مُبرهنة تالس نجد: $2 = \frac{2}{1} = \frac{BM}{MG} = \frac{BO}{OF}$

إذن: $BO=2FO$ وبذات الطّريقة نجد: $AO=2MO$, $CO=2NO$

تعلّم

- يبعدُ مركزُ ثقل المُثلّث عن كلّ رأس، ضعفَي بعده عن مُنتصف الضّلع المقابلة لهذا الرّأس.

تطبيق



في المُثلّث **ABC** المرسوم جانباً

$$AN = 3 \, , BM = \frac{9}{2}$$

- احسب $BO \, , ON$
- احسب النّسب: $\frac{ON}{AN} \, , \frac{OM}{OB} \, , \frac{AO}{AN}$

الحل

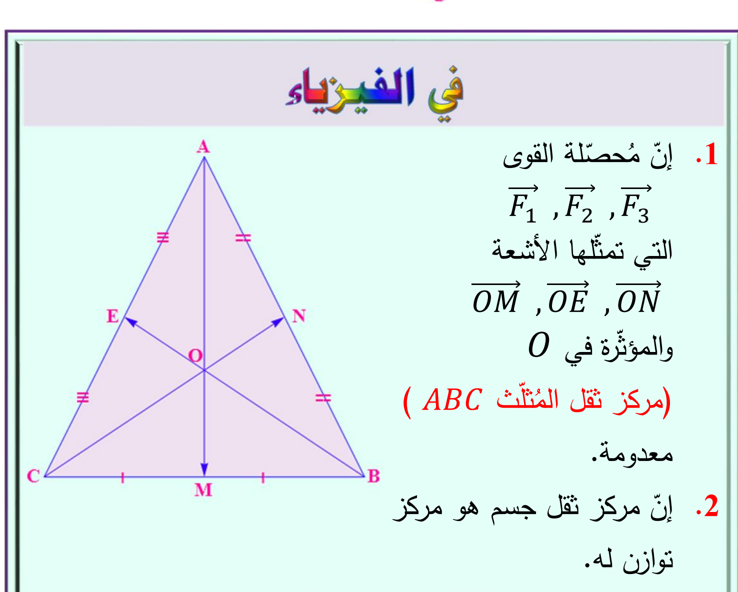
$$\frac{ON}{OA} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{ON}{OA + ON} = \frac{1}{2+1}$$ ومنه $ON = 1$

$$\frac{ON}{3} = \frac{1}{3}$$

بذات الطّريقة نجد $BO = 3$

$$\frac{OM}{OB} = \frac{1}{2} \, , \frac{ON}{AN} = \frac{1}{3} \, , \frac{AO}{AN} = \frac{2}{3}$$

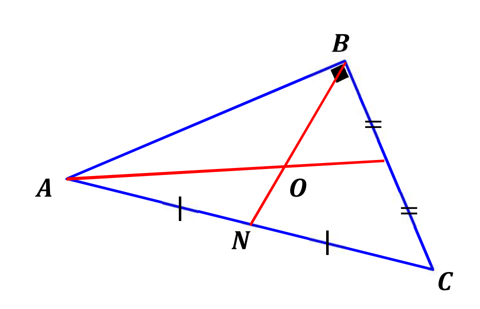


في الفيزياء

1. إنّ مُحصّلة القوى $\vec{F_1} \, , \vec{F_2} \, , \vec{F_3}$ التي تمثّلها الأشعة $\vec{OM} \, , \vec{OE} \, , \vec{ON}$ والمؤثّرة في O (مركز ثقل المُثلّث ABC) معدومة.
2. إنّ مركز ثقل جسم هو مركز توازن له.

حاول أن تحلّ

المُثلّث ABC القائم في B فيه: $AB = 6 \, , BC = 8$ ، O نقطةُ تلاقي متوسّطاته،
أوجد BO.



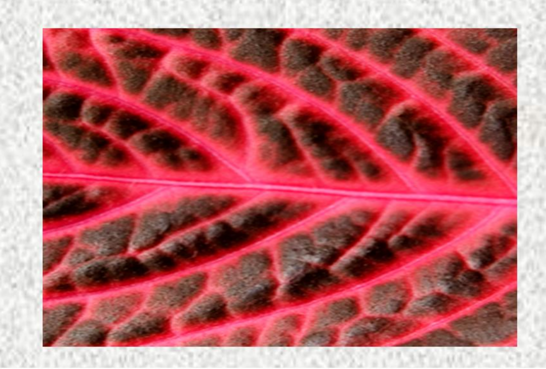
الحل

حسب فيثاغورث نجد: $AC = 10$ ومنه $BN = 5$.

إذن: $BO = \frac{2}{3} BN = \frac{10}{3}$.

4 - 1 المُنصـــف الــــدّاخلي لزاويـــة في مُثلـــث

سوف تتعلّم



- مُبرهنة المُنصّف الدّاخلي لزاوية في المُثلّث.
- مُبرهنة العكس لمُبرهنة المُنصف الداخلي لزاوية في المُثلّث.



أوّلاً مُبرهنـــــــــــــــــــــــــــــــــــة

إذا كان $(AN]$ مُنصّفاً داخليّاً للزّاوية A في المُثلّث ABC وكانت N نقطةَ تقاطعه مع الضّلع $[BC]$ فإنّ: $\frac{NB}{NC}=\frac{AB}{AC}$

الفرض:

$(AN]$ مُنصّف داخليّ للزّاوية A في المُثلّث ABC

الطلب:

$\frac{NB}{NC}=\frac{AB}{AC}$

البرهان:

نرسم مستقيماً مارّاً بـ C موازياً لـ (AN) فيقطع (BA) في D

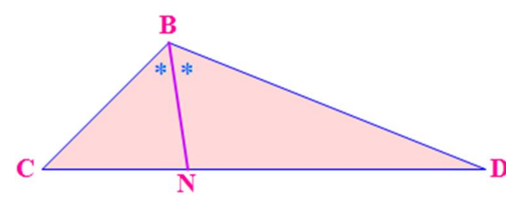
وبالتّالي: $\hat{3}=\hat{1}$ بالتّبادل الداخليّ وَ $\hat{4}=\hat{2}$ بالتّناظر
لكن: $\hat{2}=\hat{1}$ لأنّ $(AN]$ مُنصّف داخليّ للزّاوية A

إذن: $\hat{4}=\hat{3}$ وبالتالي المثلث ADC متساوي السّاقين
وفيه $AD=AC$ ..①

حسب مُبرهنة تالس في المُثلّث BCD نجد: ②.. $\frac{NB}{NC}=\frac{AB}{AD}$

نعوّض ① في ② نجد: $\frac{NB}{NC}=\frac{AB}{AC}$ **وهو المطلوب.**

ملاحظة

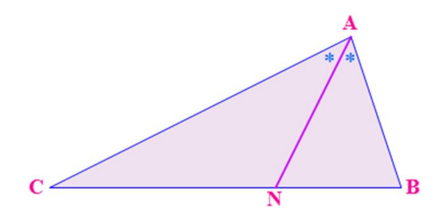


$[BN)$ مُنصّف داخليّ للزّاوية B في المُثلّث BCD

لاحظ $[ND]$ تجاورها الضّلعُ $[BD]$ وَ $[NC]$ تجاورها الضّلع $[BC]$

وبالتّالي: $\frac{BC}{BD}=\frac{NC}{ND}$ ← البسطان متجاوران / ← المقامان متجاوران أو $\frac{BD}{BC}=\frac{ND}{NC}$ ← البسطان متجاوران / ← المقامان متجاوران

تطبيق:



في الشّكل المرسوم جانباً: المُثلّث ABC فيه $BC=6\ ,\ AC=5\ ,\ AB=3$

وَ $(AN]$ مُنصّف داخليّ للزّاوية A

أوجد $NB\ ,\ NC$.

الحل:

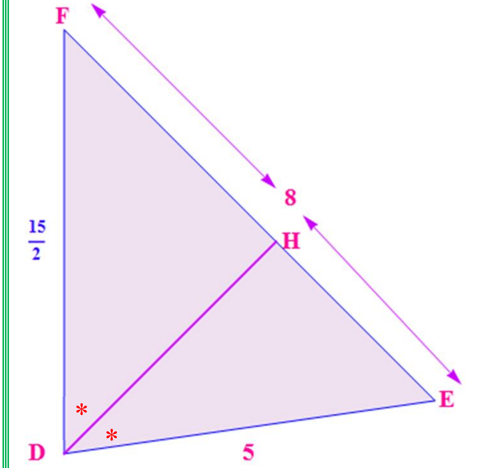
بما أنّ $(AN]$ مُنصّف داخليّ للزّاوية A فإنّ: $\frac{AC}{AB}=\frac{NC}{NB}$ وباستخدام خواصّ التّناسب نجد:

$\frac{AC}{AB+AC}=\frac{NC}{NB+NC}$ ومنه: $\frac{5}{3+5}=\frac{NC}{BC}$

أي: $\frac{5}{8}=\frac{NC}{6}$ ومنه: $NC=\frac{30}{8}=\frac{15}{4}$

بالتّالي: $NB=BC-NC=6-\frac{15}{4}=\frac{9}{4}$

حاول أن تحلّ



المُثلّث DEF فيه $EF=8\ ,DE=5\ ,DF=\frac{15}{2}$

المُنصّف الداخليّ للزّاوية D يلاقي الضّلع $[EF]$ في H

أوجد $HE\ ,\ HF$

الحل

حاول أن تحل $\frac{DE}{DF}=\frac{HE}{HF}$ ومنه $\frac{5}{\frac{25}{2}}=\frac{HE}{8}$

ومنه $HE=\frac{8\times2}{5}=\frac{16}{5}$ و $HF=8-\frac{16}{5}=\frac{24}{5}$

ثانياً مُبرهنة العكس لمُبرهنة المُنصّف الدّاخلي

إذا قطع $(AN]$ الضّلعَ $[BC]$ في نقطة N في المُثلّث ABC وكان $\frac{AB}{AC}=\frac{NB}{NC}$

فإنّ: $(AN]$ مُنصّف داخليّ للزّاوية A.

الفرض: المُثلّث ABC فيه $\frac{AB}{AC}=\frac{NB}{NC}$.

الطلب: $(AN]$ مُنصّف داخليّ للزّاوية $B\hat{A}C$

البرهان: نرسم نصف المستقيم $(CA]$ ونُعيّن عليه النّقطة D بحيث $AD=AB$

ونعوّض في الفرض نجد: $\frac{NB}{NC} = \frac{AD}{AC}$

وحسب عكس مُبرهنة تالس في المثلث نجد: $(AN) \parallel (BD)$ وبالتّالي:

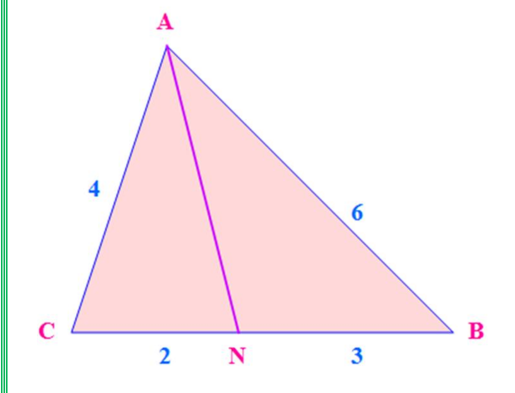
$\hat{3} = \hat{1}$ بالتّبادل الداخليّ وَ $\hat{4} = \hat{2}$ بالتّناظر، $\hat{4} = \hat{3}$ **(قياس زاويتا القاعدة في المُثلّث متساوي السّاقين متساويتان)**

ممّا سبق نجد: $\hat{2} = \hat{1}$ وبالتّالي $[AN)$ مُنصّف داخليّ للزّاوية $B\hat{A}C$

تطبيق

في الشّكل المجاور

برهن أنّ $[AN)$ مُنصِّفٌ داخليٌّ للزّاوية $B\hat{A}C$





لدينا $\frac{3}{2} = \frac{NB}{NC}$ وَ $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{AB}{AC}$

إذن: $\frac{AB}{AC} = \frac{NB}{NC}$

وحسب مُبرهنة العكس لمُبرهنة المُنصِّف الداخليّ لزاوية نجد أنّ $[AN)$ مُنصِّفٌ داخليٌّ للزّاوية $B\hat{A}C$

حاول أن تحلّ

في الشّكل المجاور

شبه المنحرف $ABCD$ فيه $AB = 2 \, , BC = 4$

$CD = 5 \, , AD = 3 \, , \frac{NA}{ND} = \frac{1}{2}$ والمطلوب:

1. احسب $NA \, , ND$.
2. برهن أنّ: $[BM)$ مُنصِّفٌ داخليٌّ للزّاوية $A\hat{B}C$.



1. بما أنّ $\frac{NA}{ND} = \frac{1}{2}$ ومنه $\frac{NA}{3} = \frac{1}{3}$ ومنه $ND = 2 \, , \; NA = 1$.
2. حسب تالس في المثلث: $\frac{NA}{AM} = \frac{ND}{MC}$ ومنه $\frac{AM}{MC} = \frac{NA}{ND}$ إذن ($\frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$ و $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$)

في المثلث ABC تحقق $\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MC}$ وحسب عكس مبرهنة المنصف الداخلي نجد $[BM)$ منصف داخلي للزاوية $A\hat{B}C$

5 - 1 المثلثات المتشابهة





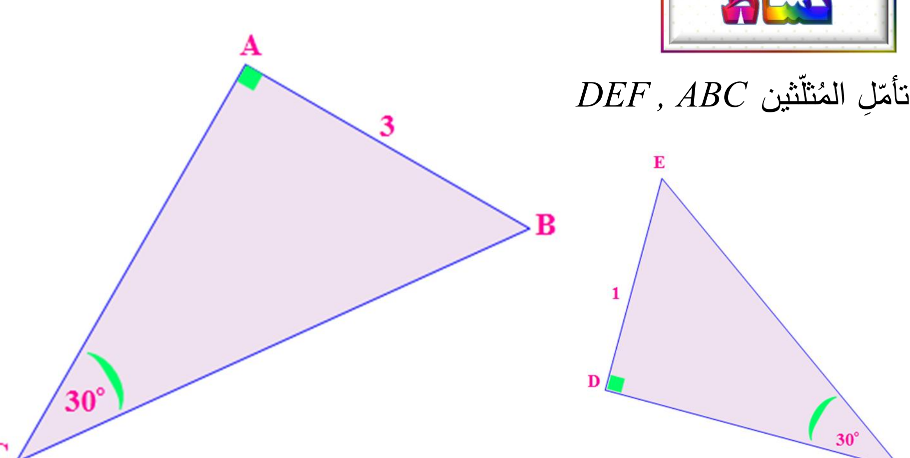


سوف تتعلّم

- النظريّة الأساسيّة في تشابه المُثلّثات.
- استخدام تشابه المُثلّثات في القياس غير المباشر.

نشاط

تأمّلِ المُثلّثين DEF , ABC

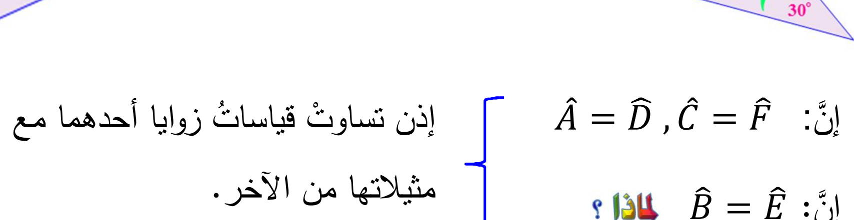


إنَّ: $\hat{A}=\hat{D}\,,\hat{C}=\hat{F}$

إنَّ: $\hat{B}=\hat{E}$ لماذا ؟

إذن تساوتْ قياساتُ زوايا أحدهما مع مثيلاتها من الآخر.

– احسبْ كلاً من: BC , AC , EF , DF



$$\frac{BC}{EF}=\frac{6}{2}=3\;,\frac{AC}{DF}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=3\;,\frac{AB}{DE}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}=\cdots\cdots\cdots$$

نستنتجُ أنّ: $\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=\frac{AB}{DE}$

تناسبَتْ أطوالُ أضلاع أحدهما مع أطوال الأضلاع المقابلة لها من الآخر

فالمُثلّثان DEF , ABC متشابهان ونسبة تشابههما هي: $k=3$

تذكر

1. عندما لا نذكر نوع المُضلّع فهو مضلعٌ محدبٌ.
2. نقول عن مضلّعين لهما العددُ ذاته من الأضلاع أنهما متشابهان إذا:
   - أ– تساوت قياسات زويا أحدهما مع قياسات زوايا الآخر.
   - ب– تناسَبَتْ أطوال الأضلاع المقابلة لتلك الزوايا من أحدهما مع أطوال الأضلاع المقابلة لها في الآخر.

   نُسمِّي أيّة نسبة منها نسبة التّشابه أو معامل التشابه.
3. نسبةُ محيطي مُضلّعين متشابهين تساوي نسبة التشابه.
4. نسبة مساحتي مُضلّعين متشابهين تساوي مُربّع نسبة التّشابه.

مفهوم التّقابل في التّشابه:

في النّشاط السّابق المُثلّثان ABC , DEF متشابهان فيهما الزّاوية A تساوي الزّاوية D
نقول إنّ الزاويتين A, D متقابلتان في هذا التّشابه.

(نسبة التّشابه) $3 = \frac{AB}{DE}$ نقول إنّ الضّلعين $[AB], [DE]$ متقابلتان في هذا التّشابه.

نتائج

من تعريف المُضلّعين المتشابهين نجد:

1. المُثلّثان الطّبوقان متشابهان (ما نسبةُ التّشابه ؟)
2. المُثلّثان المشابهان لثالث متشابهان.
3. المُثلّثُ الطبوق على أحد مُثلّثين متشابهين يُشابه المُثلّثَ الآخر.

خوارزمية كتابة نسب التّشابه

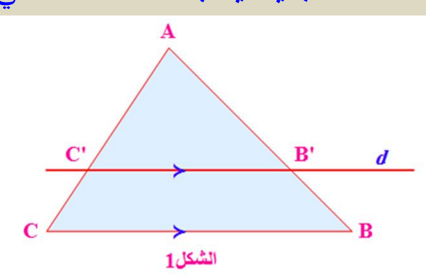
لكتابة نسب التّشابه يُفضّلُ كتابةُ كلّ زاوية من المُثلّث الأوّل وتحتها الزّاوية المقابلة لها من المُثلّث الآخر

مثلاً :

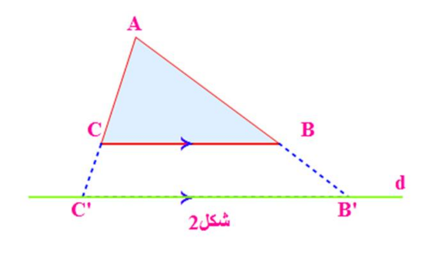
في النّشاط السّابق نكتب: $\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{pmatrix}$ إذن: $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$

أولاً المُبرهنة الأساسيّة في تشابه المُثلّثات

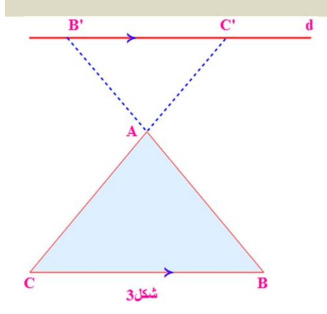
المستقيم الموازي لإحدى أضلاع مُثلّث ولا يمرّ بالرأس المقابلة لتلك الضّلع يقطع الضّلعين الباقيتين أو امتدادهما مشكّلاً مُثلّثاً جديداً يُشابه المُثلّث الأصلي.



الشكل1



شكل2



شكل3

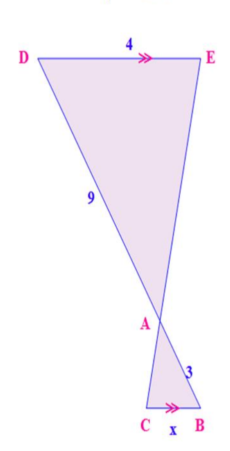
الفرض: ABC مُثلّث، d مستقيم يوازي $[BC]$ ويقطع (AB) , (AC) في C', B' على الترتيب

الطلب: المُثلّثان $ABC , AB'C'$ متشابهان.

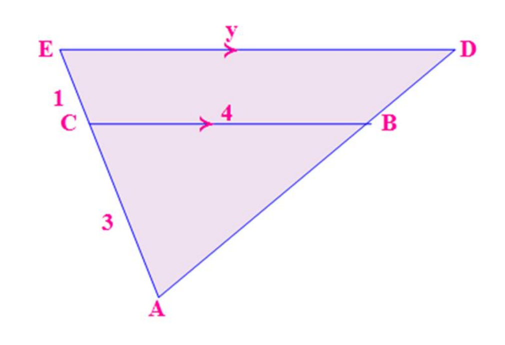
البرهان: (تُقبَلُ من دون ذكر البرهان)

تطبيق

تأمّل الشّكلين الآتيين ثُمَّ احسب كلاً من x , y



الشكل①



الشكل②

الحلّ

في **الشّكل①** المُثلّثان ABC , AED فيهما $(CB)\parallel(DE)$

وحسب المُبرهنة الأساسيّة في التّشابه نستنتج أنّهما متشابهان.

من التّشابه $\left(\begin{matrix}ABC\\ADE\end{matrix}\right.$ نجد $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$

نعوّض $\frac{x}{4}=\frac{3}{9}$ ومنه $\frac{4}{3}=\frac{12}{9}=x$

في **الشّكل②** المُثلّثان ABC , AED فيهما $(CB)\parallel(DE)$

وحسب المُبرهنة الأساسيّة في التّشابه نستنتجُ أنّهما متشابهان.

من التّشابه $\left(\begin{matrix}ABC\\ADE\end{matrix}\right.$ نجد $\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$

نعوّض $\frac{4}{y}=\frac{3}{4}$ ومنه $y=\frac{16}{3}$

حاول أن تحلّ

1. في الشّكل المجاور

$[CE)$ مُنصِّفٌ داخليٌّ للزّاوية C في المُثلّث القائم ABC في A

$AC = 6\,, AB = 8$ والمطلوب:

أ. أوجد BC ثُمّ AM.

ب. أوجد: EB ثُمّ NE.

ت. احسب CE.

الحل

أ. $BC = 10$ حسب فيثاغورث في المثلث ABC

$$\begin{cases} S(ABC) = \frac{1}{2}(8)(6) = 24 \\ S(ABC) = \frac{1}{2}(10)(AM) = 5AM \end{cases}$$ ومنه $24 = 5AM$ وبالتالي $AM = \frac{24}{5}$

ب. حسب مبرهنة المنصف الداخلي: $\frac{EB}{EA} = \frac{CB}{CA}$ ومنه $\frac{EB}{8} = \frac{10}{16}$ إذن: $EB = 5$ ومنه $AE = 3$

$[AM] /\!/ [EN]$ (قطعتان مستقيمتان عموديتان على مستقيم واحد هو (BC))

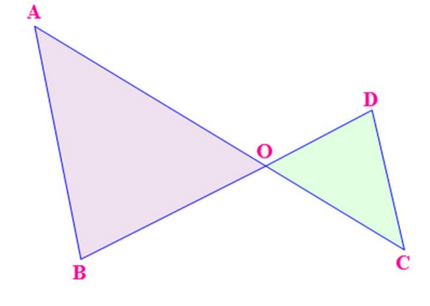
المثلثان AMB , ENB: متشابهان حسب المبرهنة الأساسية في التشابه.

من التشابه: $\frac{AB}{EB} = \frac{AM}{EN}$ ومنه $\frac{8}{5} = \frac{\frac{24}{5}}{EN}$ ومنه $EN = 3$

ت. حسب فيثاغورث في المثلث CAE نجد $CE = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

2. في الشّكل المجاور تتحقّقُ المساواةُ $oA \times oD = oB \times oC$

برهن أنّ المُثلّثين $oAB\,, oCD$ متشابهان.

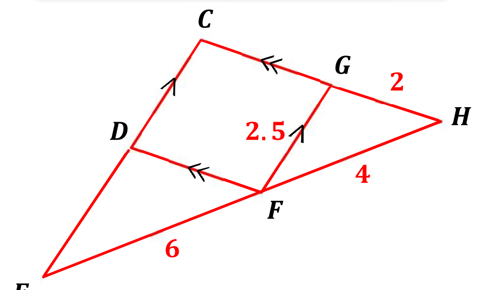




بما أنَّ $OA \times OD = OB \times OC$ ومنه: $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$

وحسب عكس تالس في المثلث نجد: $(AB) /\!/ (DC)$

ومنه المثلثان ODC، OAB متشابهان حسب المبرهنة الأساسية في التشابه



3. في الشّكل المجاور

أ. برهنْ أنّ المُثلّثين FGH , FDE متشابهان.

ب. احسب محيط المُثلّث FDE.



المثلثان EDF, EHC متشابهان حسب المبرهنة الأساسية في التشابه والمثلثان FGH, EHC متشابهان حسب المبرهنة الأساسية في التشابه ومنه المثلثان FGH، EDF متشابهان لأن المثلثين المشابهين لثالث متشابهان

$$\frac{P(FDE)}{P(FGH)} = K = \frac{EF}{FH} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$ ومنه: $$\frac{P(FDE)}{8.5} = \frac{3}{2}$$ ومنه: $$P(FDE) = 12.75$$

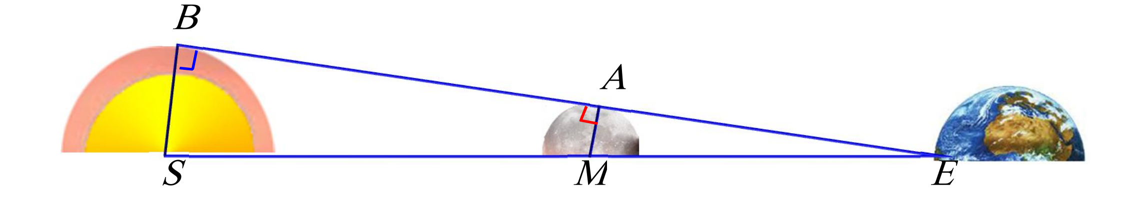
ثانيا تطبيقات التشابه في القياس غير المباشر

1. يُراقبُ محمد كسوف الشّمس من الموقع E على الأرض، النّقطة S مركزُ الشّمس والنّقطة M مركزُ القمر،

فإذا علمت أنّ طول نصف قطر الشّمس $SB = 695000\ km$

وأنّ طول نصف قطر القمر $MA = 1736\ km$ وأنّ المسافة بين محمد ومركز الشّمس $ES = 150000000\ km$

فاحسبِ المسافةَ بين محمد ومركز القمر مقرّباً الجواب لأقرب جزء من مئة.



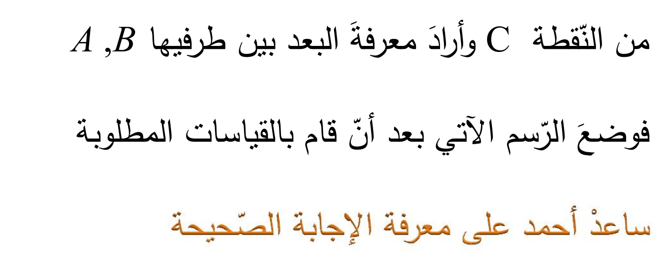
الحل

$(MA)\parallel(SB)$ (عمودان على مستقيم واحد)

فالمثلثان EMA، ESB متشابهان حسب المبرهنة الأساسية في التشابه

ومنه $\frac{AM}{BS} = \frac{EM}{ES}$ ومنه $\frac{1736}{695000} = \frac{EM}{150000000}$

ومنه: $EM \simeq 374676.26K.M$



2. نظر أحمد إلى بركة ماء كما في الشّكل المجاور

من النّقطة C وأرادَ معرفةَ البعد بين طرفيها A ,B

فوضعَ الرّسم الآتي بعد أنّ قام بالقياسات المطلوبة

ساعدْ أحمد على معرفة الإجابة الصّحيحة

(علماً أنّ الأبعاد مقاسةٌ بالمتر)



الحل

المثلثان ABC، $A'B'C'$ متشابهان

حسب المبرهنة الأساسية في التشابه

ومنه: $\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB}$

إذن $\frac{20}{80} = \frac{16}{AB}$

ومنه $AB = 64\ m$

تمرينــــات الوحــــدة

1. العددان $A\,,B$ يحقّقان $135\,A = 225\,B$

- احسبِ النّسبة $\frac{A}{B}$
- إذا كان $A - B = 128$ فأوجِدِ العددين $A\,,B$.

الحل

$\frac{A}{B} = \frac{225}{135} = \frac{5}{3}$ إذن $\frac{A-B}{B} = \frac{5-3}{3}$

ومنه $\frac{128}{B} = \frac{2}{3}$ بالتالي $B = 192$

ومنه $A = 128 + 192 = 320$

2. معلومات عامّة

في شاشة التّلفاز القياسية المستطيلة تكون نسبة عرضها إلى ارتفاعها $\frac{4}{3}$

هل هذه النّسبةُ ذهبيّةٌ ؟

وإذا علمْتَ أنّ محيط هذه الشّاشة $140cm$ فاحسب بعديها.

الحل :

إنّ $1.618 \neq \frac{4}{3}$ فهي لا تشكل نسبة ذهبية

إذا رمزنا لعرض شاشة التلفاز بـ x ولارتفاعها بـ y

فإن $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$ ومنه $\frac{x+y}{y} = \frac{4+3}{3}$ إذن $\frac{70}{y} = \frac{7}{3}$

ومنه $x = 40\,,\; y = 30$

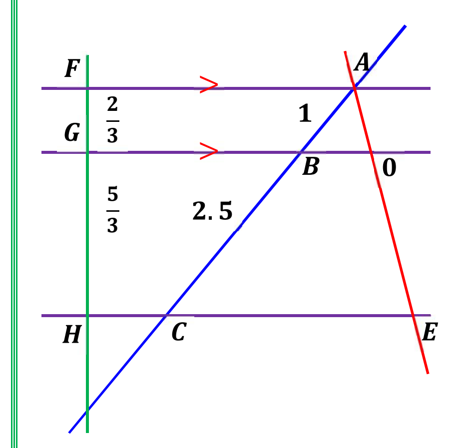
معلومة

المستطيل الذهبي

غالبـاً مــا يســتخدم الرســامون المســتطيلَ الــذّهبي لعــرض لوحــاتهم الفنّيــة، ونسـبةُ طـول هــذا المسـتطيل إلــى عرضــه تســاوي تقريبــاً 1.618 وتُسمّى النّسبة الذّهبية.

3. في الشّكل المرسوم جانباً $AE = 2.8$.

– برهن أنّ $(FA) /\!/ (HC)$، ثُمَّ احسب AO.



الحل

$$\begin{cases} \dfrac{FG}{AB} = \dfrac{\frac{2}{3}}{1} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{GH}{BC} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$ ومنه $\dfrac{GH}{BC} = \dfrac{FG}{AB}$

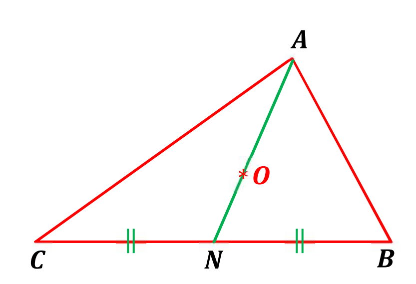
وحسب عكس مبرهنة تالس نجد $(FA) /\!/ (HC)$

حسب مبرهنة تالس نجد: $\dfrac{1}{3.5} = \dfrac{AO}{2.8}$ ومنه $AO = \dfrac{28}{35} = 0.8$

4. في الشّكل المرسوم جانباً:

$AN = 3\sqrt{3}\ ,\ AO = 2\sqrt{3}$

برهن أنّ O هي مركز ثقل المُثلّث ABC

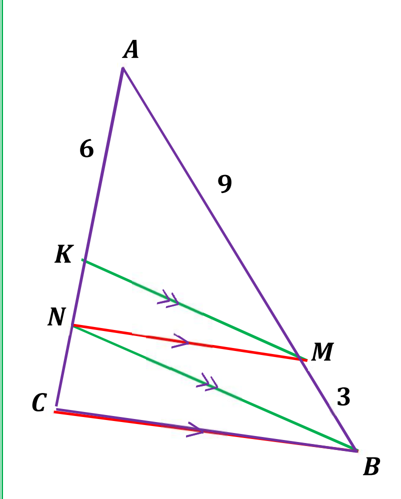


الحل

$ON = NA - AO = \sqrt{3}$ وبالتالي $\dfrac{ON}{OA} = \dfrac{1}{2}$

O نقطة من المتوسط $[AN]$ فهي نقطة تلاقي المتوسطات.

5. تأمّلِ الشّكلَ المرسوم جانباً ثُمَّ احسب CN



الحل

حسب مبرهنة تالس نجد: $\dfrac{MB}{KN} = \dfrac{AM}{AK}$ ومنه $\dfrac{3}{KN} = \dfrac{9}{6}$ إذن $KN = 2$

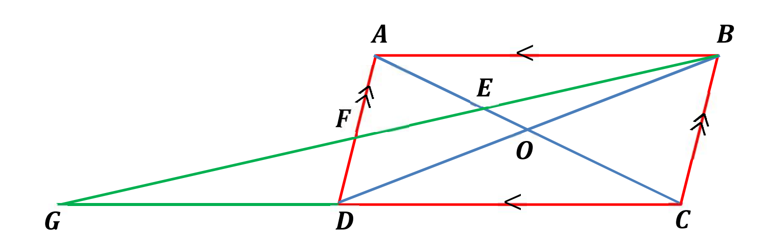
حسب مبرهنة تالس نجد: $\dfrac{MB}{NC} = \dfrac{AM}{AN}$ ومنه $\dfrac{3}{NC} = \dfrac{9}{6+2}$

إذن $NC = \dfrac{24}{9} = \dfrac{8}{3}$

6. $ABCD$ متوازي أضلاع نقطةُ تقاطع قطريه (O)، E نقطة من $[AO]$

نصفُ المستقيم (BE) يقطعُ $[AD]$ في F ويقطعُ نصفُ المستقيم (CD) في G

برهن أنّ $EB^2 = EG \times EF$



الحل:

لدينا $(GC) \mathbin{/\!/} (AB)$, (BG) , (CA) قواطع

إذن: ① ... $\dfrac{EB}{EF} = \dfrac{EC}{EA}$

لدينا $(AD) \mathbin{/\!/} (BC)$, (BF) , (CA) قواطع إذن ② ... $\dfrac{EG}{EB} = \dfrac{EC}{EA}$

من ② , ① نجد $\dfrac{EG}{EB} = \dfrac{EB}{EF}$ ومنه $EB^2 = EG \times EF$

7. تأمّلِ الشّكلَ المرسوم جانباً



- احسب كلاً من FE , BC
- احسب كلاً من DE , CD



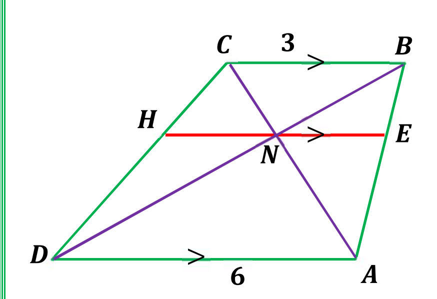
الحل

$\dfrac{6}{8} = \dfrac{x}{x + \dfrac{10}{3}}$ ومنه $\dfrac{6}{8} = \dfrac{x}{\dfrac{3x + 10}{3}}$

بالحساب نجد $x = 10 = BC$ ومنه $FE = 10 + \dfrac{10}{3} = \dfrac{40}{3}$

كما أن $\dfrac{2y - 3}{\dfrac{40}{3}} = \dfrac{y}{8}$ ومنه $\dfrac{6y - 9}{5} = \dfrac{y}{1}$ ومنه $y = 9$ إذن $CD = 9$ ومنه $DE = 15$.

8. تأمّلِ الشّكلَ المرسوم جانباً



– احسب النّسبةَ $\frac{ND}{NB}$ واستنتجْ قيمة كلّ من النّسبتين $\frac{NB}{BD}$, $\frac{ND}{BD}$.

– احسب EH.

الحل

المثلثان ADN , BCN متشابهان

بحسب المبرهنة الأساسية في التشابه نجد: $\left.\begin{matrix}NAD\\NCB\end{matrix}\right)\frac{ND}{NB}=\frac{AD}{BC}=\frac{6}{3}=2$

ومنه $ND=2NB$ أي $\frac{ND}{BD}=\frac{2}{3}$, $\frac{NB}{BD}=\frac{1}{3}$

المثلثان BAD , BEN متشابهان بحسب المبرهنة الأساسية في التشابه ومنه: $\left.\begin{matrix}BAD\\BEN\end{matrix}\right)\frac{AD}{EN}=\frac{BD}{BN}$

بالتالي $\frac{6}{EN}=\frac{3}{1}$ أي $EN=2$

المثلثان NHD , BCD متشابهان بحسب المبرهنة الأساسية في التشابه ومنه:

$\left.\begin{matrix}DCB\\DHN\end{matrix}\right)\frac{CB}{HN}=\frac{DB}{DN}:\frac{3}{HN}=\frac{3}{2}$

بالتالي $HN=2$ أي $EH=2+2=4$



الوحـــــــــدة الأولى

المســـــــــتقيمات المتوازيـــــــــة والقواطـــــــــع

(الدّرس 1 – 1)

1. إذا كان $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ وكان $x + y = 15$ فاحسب كلاً من x, y

الحل:

بالمبادلة بين الوسطين نجد $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$

ومنه $\frac{x+y}{y} = \frac{2+3}{3}$ إذن $\frac{15}{y} = \frac{5}{3}$

ومنه $x = 6 \ , \ y = 9$

2. شريحة جبن كتلتها $56 \ g$ ونسبة الدهون المشبعة فيها إلى باقي كتلتها $\frac{5}{2}$

احسب كتلة الدهون المشبعة في شريحة الجبن.

الحل:

نفترض أنّ كتلة الدهون المشبعة x وباقي كتلة الشريحة y

يكون $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$ ومنه $\frac{56}{y} = \frac{7}{2}$ إذن $y = 16$ ومنه $x = 40 \ gm$ كتلة الدهون المشبعة في الشريحة

3. تهتم الدّولة بالطّفولة المبكرة (يقصد بها عادة الأطفال الذين تقل أعمارهم عن 6 سنوات) لأنها تشكّل مستقبل الأمّة وفي إحصائية وُجد أنّ نسبة عدد السّكان من هذه الشّريحة إلى باقي عدد السّكان في سوريا هي $\frac{1}{8}$ ،
فإذا كان عدد سكان سوريا عند إجراء الإحصائية 22113000 نسمة تقريباً، فما عدد الّسكان الذين ينتمون لهذه الشّريحة؟

معلومة
بيّنت الدراسات العلمية أنّ الست سنوات الأولى من عمر الطفل حاسمة في نموه حيث تتشكل الذكاءات المتعددة للطفل في هذه المرحلة وينمو دماغه ليصل إلى حوالي 40% من حجمه الكلّي.

الحل:

$\frac{x}{y} = \frac{1}{8}$ ومنه $\frac{x}{y+x} = \frac{1}{8+1}$ إذن $\frac{1}{9} = \frac{x}{22113000}$

ومنه $x = 2457000$ نسمة هم عدد سكان سوريا الذين تقل أعمارهم عن 6 سنوات عند إجراء الإحصائية.

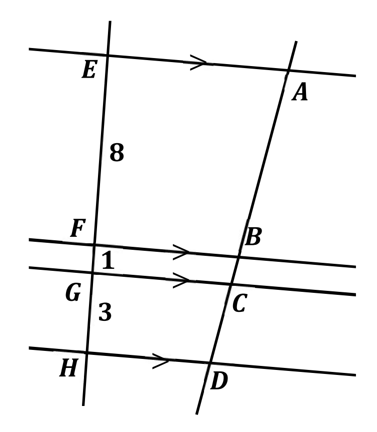
الدّرس (2 – 1)



1. في الشّكل المرسوم جانباً:

إذا كانت $AD = 15$

احسب $AB\ , BC$



الحل:

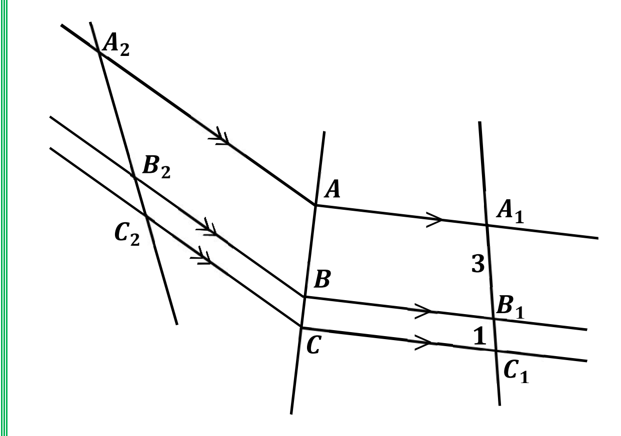
حسب مبرهنة تالس $\frac{15}{12} = \frac{AB}{8}$ ومنه $AB = 10$

حسب مبرهنة تالس $\frac{10}{8} = \frac{BC}{1}$ ومنه $BC = \frac{5}{4} = 1.25$



2. في الشّكل المرسوم جانباً:

$B_2C_2 = \frac{5}{3}$ ، احسب A_2B_2



الحل:

إنّ $\frac{B_2C_2}{BC} = \frac{A_2B_2}{AB}$ ومنه $\frac{A_2B_2}{B_2C_2} = \frac{AB}{BC} \cdots ①$

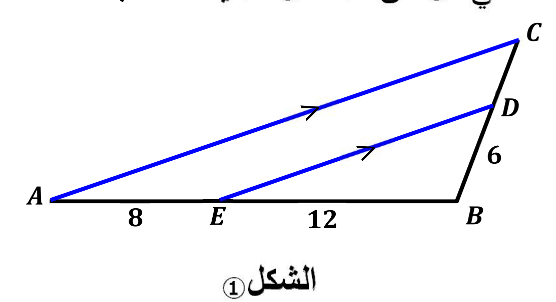
وإنّ $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1B_1}{AB}$ ومنه $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{AB}{BC} \cdots ②$

من 1 وَ 2 نجد $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$

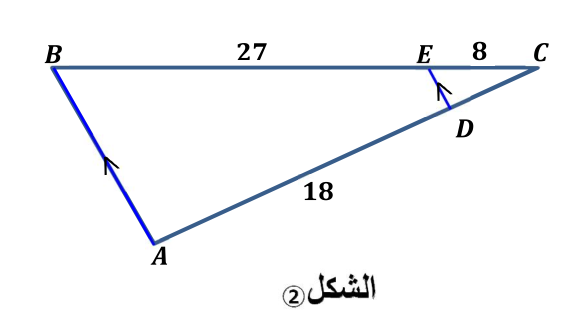
ومنه $\frac{3}{1} = \frac{A_2B_2}{\frac{5}{3}}$ ومنه $A_2B_2 = 5$

الدّرس (3 – 1)

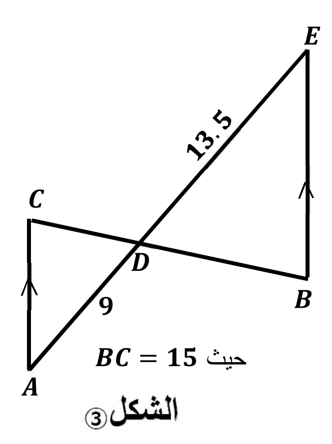
1. في كلّ من الأشكال الآتية، احسب DC :



الشكل①



الشكل②



الشكل③

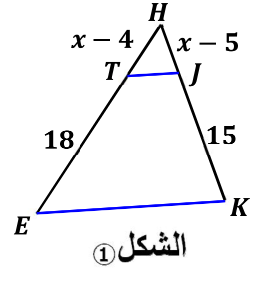
الحل:

في الشّكل①: $\frac{DC}{8} = \frac{6}{12}$ ومنه $DC = 4$

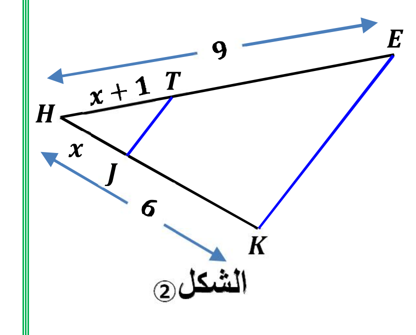
في الشّكل②: $\frac{DC}{8} = \frac{18}{27}$ ومنه $DC = \frac{18\times8}{27} = \frac{16}{3}$

في الشّكل③: $\frac{DC}{15} = \frac{DA}{AE} = \frac{9}{22.5}$ إذن $DC = \frac{15\times9}{22.5} = 6$

2. ما هي قيمة x التي تجعل $EK \mathbin{/\!/} JT$ في كل من الشّكلين الآتيين:



الشكل①



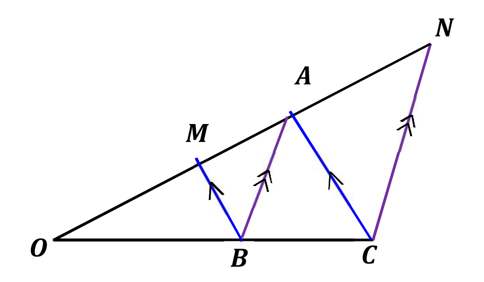
الشكل②

الحل: في الشّكل①: $\frac{x-5}{x-4} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$ ومنه $x = 10$

في الشّكل②: $\frac{x+1}{x} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ ومنه $x = 2$

3. في الشّكل المرسوم جانباً:

برهن أنّ $OA^2 = OM \times ON$



الحل:

لدينا $\frac{OB}{OC} = \frac{OA}{ON} \cdots ①$ كما أنّ $\frac{OB}{OC} = \frac{OM}{OA} \cdots ②$

من ① و ② نجد $\frac{OA}{ON} = \frac{OM}{OA}$ ومنه $OA^2 = OM \times ON$

الدّرس (4 – 1)



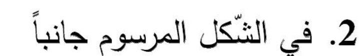
1. في الشّكل المرسوم جانباً:

$[AN)$ مُنصّف داخلي للزاوية $B\hat{A}C$ أوجد: NB



الحل:

$\frac{AB}{AC} = \frac{NB}{NC}$ ومنه $\frac{14}{21} = \frac{NB}{9}$ ومنه $NB = 6$

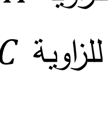


2. في الشّكل المرسوم جانباً

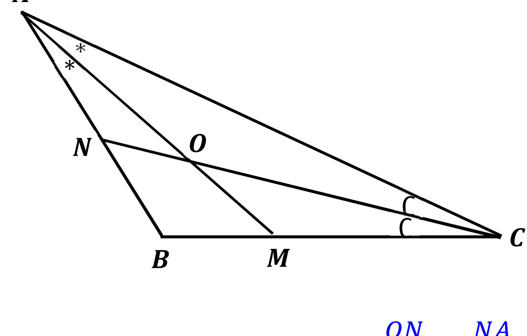
$BC = 6 \,, AB = 4 \,, AC = 8$

$[AM)$ مُنصّف داخلي للزاوية A

$[CN)$ مُنصّف داخلي للزاوية C



احسب النّسبة $\frac{ON}{OC}$



الحل:

$\frac{AC}{BC} = \frac{NA}{NB}$ ومنه $\frac{8}{14} = \frac{NA}{4}$ ومنه $NA = \frac{16}{7}$ وبالتالي $\frac{2}{7} = \frac{\frac{16}{7}}{\frac{8}{1}} = \frac{NA}{AC} = \frac{ON}{OC}$

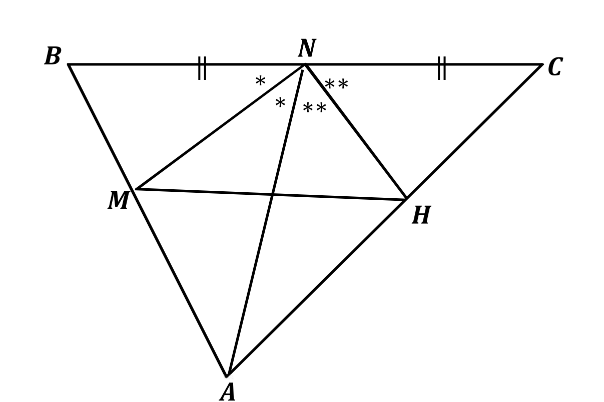


3. في الشّكل المرسوم جانباً: N منتصف $[BC]$

$[NH)$ مُنصّف داخلي للزاوية $A\hat{N}C$

$[NM)$ مُنصّف داخلي للزاوية $A\hat{N}B$

برهن أنّ $[MH] /\!/ [BC]$





الحل:

$[NH)$ مُنصّف ومنه ① $\cdots \frac{AN}{NC} = \frac{HA}{HC}$

$[NM)$ مُنصّف ومنه ② $\cdots \frac{NA}{NB} = \frac{MA}{MB}$

لكن $\frac{NA}{NB} = \frac{NA}{NC}$ لأنّ $[AN]$ متوسّط ومنه: $\frac{MA}{MB} = \frac{HA}{HC}$

إذن $\frac{HC}{MB} = \frac{HA}{MA}$ وحسب عكس تالس نجد: $[MH] /\!/ [BC]$

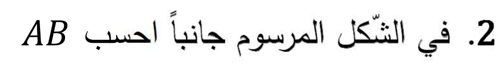
(الدّرس 5 – 1)



1. في الرسم الموجود جانباً حدد المُثلّثات المتُشابهة

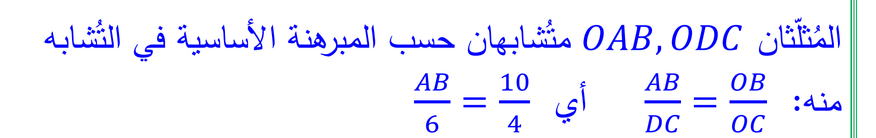
الحل:

المُثلّثات المتُشابهة هي: $ABC\,,AMN\,,BEM\,,CEN$



2. في الشّكل المرسوم جانباً احسب AB

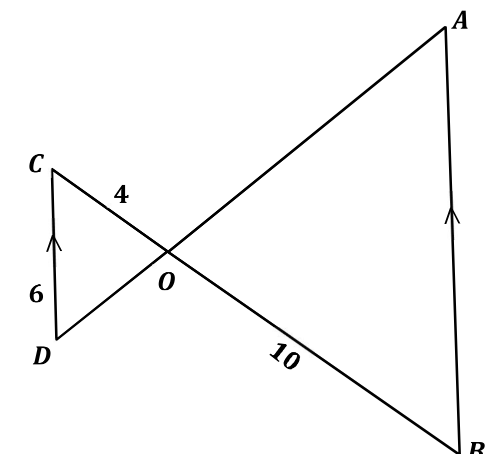
الحل:



المُثلّثان OAB,ODC متُشابهان حسب المبرهنة الأساسية في التُّشابه

منه: $\frac{AB}{DC}=\frac{OB}{OC}$ أي $\frac{AB}{6}=\frac{10}{4}$

ومنه $AB=15$

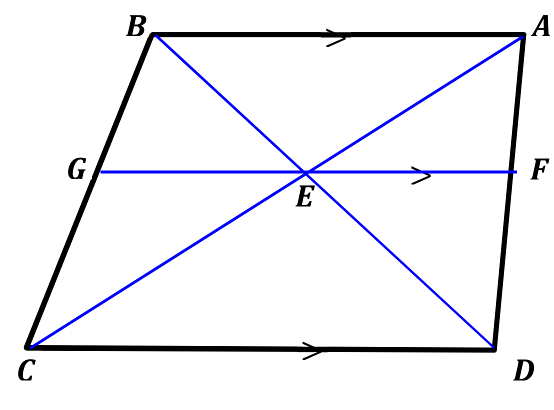


3. $ABCD$ شبه منحرف، قاعدتاه $[AB],[CD]$،

E نقطة تقاطع قطرية، نصف المستقيم $(EF]$ الموازي لـ $[AB]$ يقطع $[AD]$ في F والمطلوب:

1) a) بيّن أنّ $\frac{DF}{DA}=\frac{EF}{AB}$ b) بيّن أنّ $\frac{AF}{AD}=\frac{EF}{CD}$ c) بيّن أنّ $\frac{EF}{AB}+\frac{EF}{CD}=1$

2) نصف المستقيم $(FE]$ يقطع $[BC]$ في G برهن أنّ E مُنتصف $[FG]$



الحل:

1. a. من تُشابه المُثلّثين $DBA\,,DFE$ نجد $\frac{DF}{DA}=\frac{EF}{AB}$

b. من تُشابه المُثلّثين $AFE\,,ADC$ نجد $\frac{AF}{AD}=\frac{EF}{CD}$

c. $\frac{EF}{AB}+\frac{EF}{CD}=\frac{DF}{AD}+\frac{AF}{DA}=\frac{DA}{DA}=1$

2. من تُشابه المُثلّثين $DAB\,,DFE$ نجد $\frac{DF}{DA}=\frac{FE}{AB}=\frac{DE}{DB}$

من تُشابه المُثلّثين $ABC\,,CGE$ نجد $\frac{CG}{CB}=\frac{CE}{CA}=\frac{GE}{BA}$

لكن حسب تالس: $\frac{CG}{CB}=\frac{DF}{DA}$ ومنه $\frac{FE}{AB}=\frac{GE}{AB}$ ومنه $FE=GE$ ومنه E منتصف $[FG]$

اختبار الوحدة الرابعة (الهندسة)

أولاً : صنافة الاختبار:

الفهم	السؤال	الإجراء	السؤال
يعرف بعض خواص التناسب	1(a)	يثبت توازي مستقيمين عبر عكس مبرهنة تالس	3(b)
يعرف التناسب الذي ينتج عن مبرهنة تالس	1(b)	يطبق المبرهنة الأساسية في التشابه لاثبات تشابه مثلثين	4(c)+3(c)
يعرف خاصية مركز ثقل المثلث	1(c)	يحسب طول عبر كتابة التناسبات الناتجة عن تشابه مثلثين	3(c)
يعرف خاصية المنصف الداخلي لزاوية	1(d)	يوجد مساحة أحد مثلثين متشابهين اعتماداً على نسب التشابه	4(c)
		يستخدم عكس مبرهنة المنصف الداخلي	4(a)
		يحسب طول الارتفاع المتعلق بالوتر في مثلث قائم عبر حساب مساحة هذا المثلث بطريقتين	4(b)
		يبرهن خاصية مركز ثقل المثلث	2 (a)
		يُثبِتُ مبرهنة العكس لمبرهنة المنصف الداخلي	2 (b)

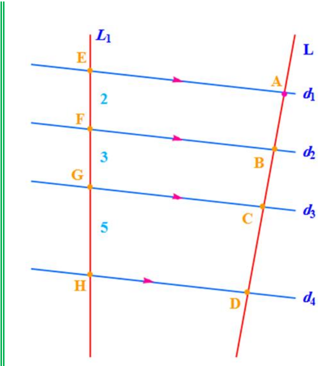
ثانياً: الاختبار:

السؤال الأول :

a) إذا كان لدينا التناسب $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ فإنَّ واحدة فقط من التناسبات الآتية خاطئة :

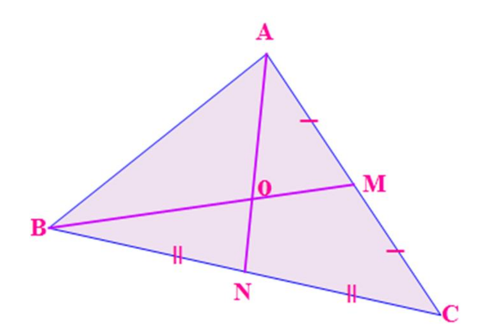
$\frac{a}{b} = \frac{a.c}{b.d}$	$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$	$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

b) في الشكل المجاور واحدة فقط من التناسبات الآتية خاطئة:



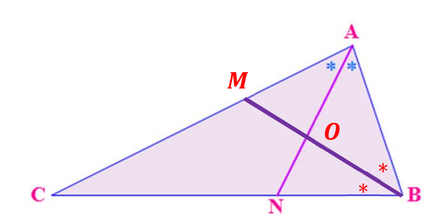
$\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG}$	$\frac{BC}{FG} = \frac{GH}{DC}$	$\frac{DC}{HG} = \frac{CA}{EG}$	$\frac{EH}{FG} = \frac{DA}{CB}$

c) في الشكل الآتي إجابة واحدة فقط خاطئة:



$\frac{ON}{AN} = \frac{1}{3}$	$\frac{AO}{AN} = \frac{2}{3}$	$\frac{OA}{ON} = \frac{1}{2}$	O مركز ثقل المثلث

d) في الشكل المرسوم جانباً إجابة واحدة فقط خاطئة:



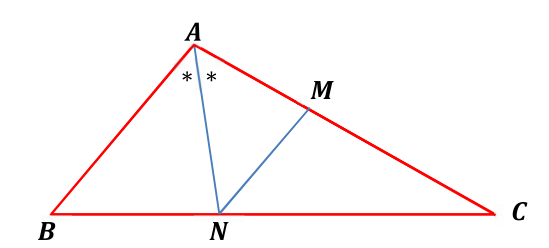
$\frac{NC}{NB} = \frac{AC}{AB}$	$\frac{MA}{MC} = \frac{BC}{AB}$	$\frac{ON}{OA} = \frac{CN}{AC}$	$\frac{OA}{ON} = \frac{BA}{BN}$

السؤال الثاني: أجب عن أحد السؤالين الآتيين:

a) برهن أنّ مركز ثقل المثلث يبعد عن كل رأس ضعفي بعده عن منتصف الضلع المقابلة لهذا الرأس

b) أثبت صحة المبرهنة : إذا قطع $(AN]$ الضلع $[BC]$ في نقطة N في المثلث ABC وكان $\frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AC}$ فإنَّ $(AN]$ منصف داخلي للزاوية A.

السؤال الثالث: في الشكل المجاور ABC مثلث فيه $[AN)$ منصف داخلي للزاوية $B\hat{A}C$،



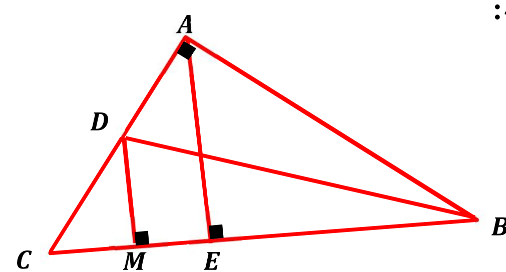
$AM = \frac{6}{5}, AC = 3, AB = 2, BC = 4$ والمطلوب:

a) احسب NC

b) برهن أنَّ $(AB)//(NM)$

c) برهن تشابه المثلثين ABC, MNC واحسب NM

السؤال الرابع: في الشكل المجاور ABCمثلث قائم الزاوية في A وفيه:



$[AE] \perp [BC]$, $AB = 4, AD = \frac{4}{3}, DC = \frac{5}{3}$

$[DM] \perp [BC]$

a) برهن أنَّ $[BD)$ منصف داخلي للزاوية $A\hat{B}C$

b) احسب كلاً من : AE, EC, EB

c) برهن تشابه المثلثين: DMC, AEC واستنتج مساحة المثلث DMC

انتهت الأسئلة

النِّســـــب المثلّثيّـــــة للزّاويـــــة الحـــــادّة

مُنظِّم الدّرس (1 – 2)

أهداف الدّرس

التعرف على النسب المثلثية للزاوية الحادة واستخداماتها

المفردات والمصطلحات الجديدة

جيب الزاوية ، جيب تمام(تجيب) الزاوية ، ظل الزاوية ، الضلع المقابلة ، الضلع المجاورة.

مُستلزمات الدّرس

كتابي الطالب والأنشطة والسبورة

ســـــــير الــــــــدّرس

التّمهيـــــــــــد

ذكّر الطّلاب بقياس الزّاوية الحادّة والزّاويتين المتتامتين ونفّذ النّشاط الموجود في بداية الدّرس في كتاب الطّالب كتهيئة للدّرس

التّــــــــدريس

- وضّح الشكل الموجود في النّشاط ①.
- كلّف مجموعات العمل بالإجابة عن السّؤال الموجود في هذا النّشاط .
- اطلب من المجموعات أن تُعبّر عمّا توصّلت إليه في هذا النّشاط شفهيّاً.
- اذكر التّعلُّم النّاتج عن هذا النّشاط واطرح السؤال: ماجيب الزّاوية الحادّة ؟
- حل التّطبيق رقم ①على السّبورة .
- اطلب من مجموعات العمل تنفيذ النّشاطين ②و ③ مع التّعلُّم والتّطبيق الخاص لكلٍ منهما.

الخاتمة والتّقييم

تحقق من فهمك :

اطرح الأسئلة الآتية على الطّلاب

- هل لجيب الزّاوية الحادّة واحدة قياس ؟
- هل للزاوية الحادّة أكثر من جيب ؟
- ما الزّاوية الحادّة في المُثلّث القائم التي يتساوى جيبها مع جيب تمامها ؟



الواجب المنزلي:

التّمرين الأوّل من كتاب الأنشطة مضافاً إليه حساب كلّ من AN,DN حيث $[DN]$ ارتفاع متعلّق بالوتر في المُثلّث القائم ADB.

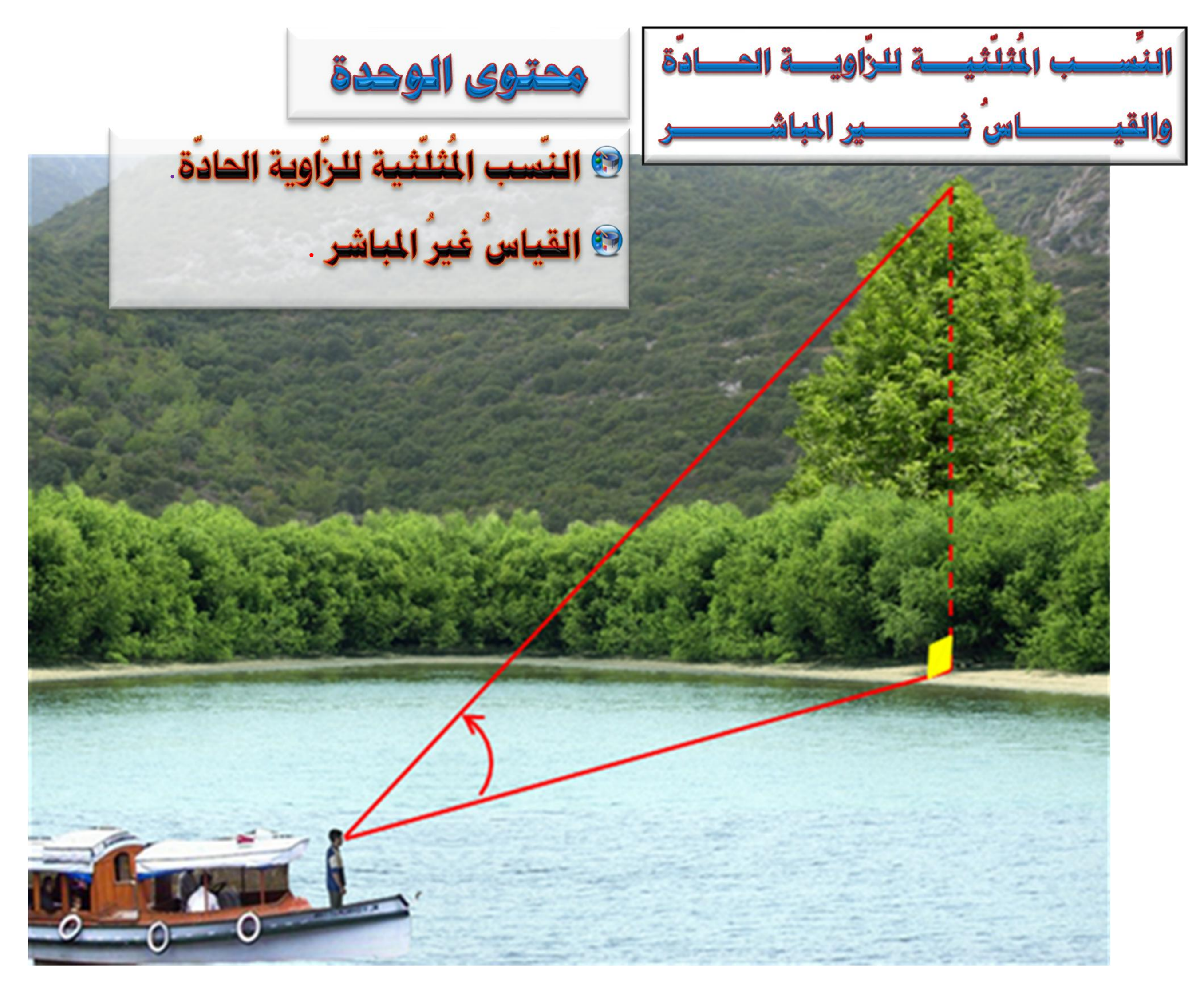


الوحــــــــدة الثّانيــــــــة

النِّســب المُثلّثيـــة للزّاويـــة الحـــادّة والقيــــاسُ غـــــير المباشــــر

محتوى الوحدة

- النّسب المُثلّثية للزّاوية الحادّة.
- القياسُ غيرُ المباشر .



تُفيدُ دراسة المُثلّثات في كثير من المواقف الحياتية،

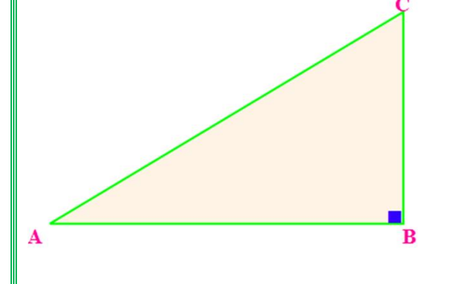
ففنُّ العمارة مثلاً يرتكزُ على علم الهندسة المعماريّة بما فيه علم حساب المُثلّثات.

وتدخل النّسب المُثلّثيّة للزّاوية الحادّة (SIN, COS, TAN) والعلاقة بينها

في كثير من العمليّات الرّياضيّة وحساب الأطوال وقياسات الزّوايا.



نشاط



ABC مُثلّث قائم الزّاوية في B والزّاوية A حادّة فيه، كما في الشّكلِ المجاورِ:

نُسمِّي: $[BC]$ الضّلع المقابلةَ للزّاوية A.

: $[AB]$ الضّلع المُجاورة للزّاوية A.

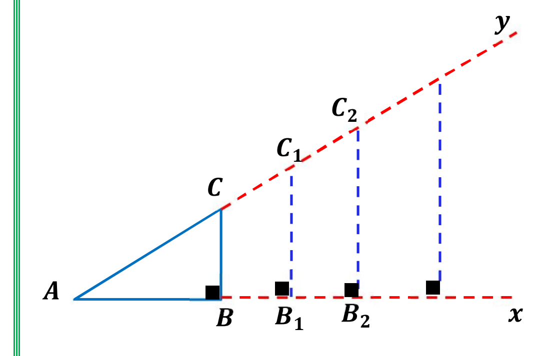
: $[AC]$ وتراً في المُثلّث القائم ABC لأنها ضلع تقابل الزّاويةَ القائمةَ B

ما الضّلع المقابلةُ للزّاويةِ الحادّة C ؟

ما الضّلع المُجاورة للزّاويةِ الحادّة C ؟

أولاً النّسب المُثلّثيّة الأساسية للزّاوية الحادّة

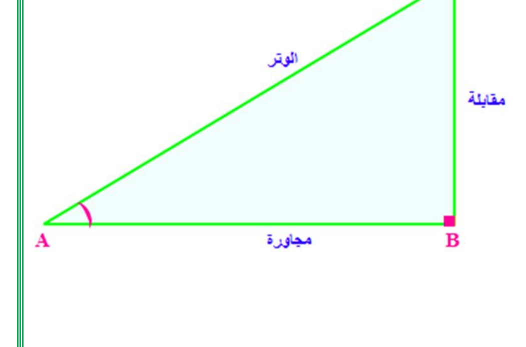




في الشّكلِ المجاورِ: الزّاوية $x\hat{A}y$ حادّة، أخذنا على الضّلع $[Ay)$ النقط .. , C , C_1 , C_2 ورسمنا منها الأعمدة على الضّلع $[Ax)$ فقطعته في النقط B , B_1 , B_2 ,..... على الترتيب، بيّن أنّ $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \cdots\cdots$

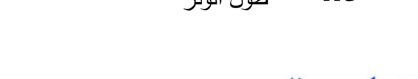
(لاحظ أنّ البسوط هي أطوال الأضلاع المقابلة للزّاوية الحادّة A في المُثلّثات القائمة ABC , AB_1C_1 , AB_2C_2, ... وأنّ المقامات هي أطوال الأوتار في المُثلّثات السّابقة).

أي أنّ نسبة طول الضّلع المقابلة للزّاوية الحادّة A إلى طول الوتر في أيّ مُثلّث قائم A إحدى زواياه: هي نسبة ثابتة نُسمِّيها جيب A ونرمّزها $sin\ A$.



تعلّم

- ABC مُثلّثٌ قائمُ الزّاويةِ في B إنّ:



$\frac{BC}{AC} = \frac{\text{طول المقابلة}}{\text{طول الوتر}} = sinA$.

تطبيق 1

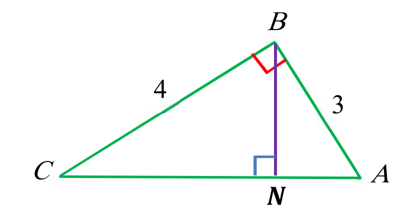
ABC مُثلّثٌ قائمُ الزّاويةِ في B فيه: $AB = 3$, $CB = 4$

أ. ارسم المُثلّث ABC واحسب AC.

ب. احسب $sin\ A$.

ت. ارسم الارتفاع $[BN]$ المتعلّق بالوتر $[AC]$ واحسب طوله.

الحل



حسب مُبرهنة فيثاغورث في المُثلّث ABC القائم نجد: $AC = 5$

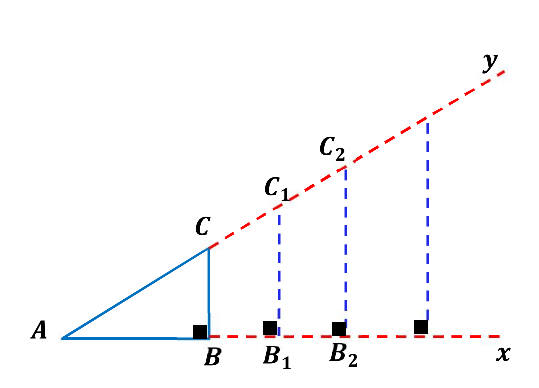


من الشّكلِ المجاورِ

نجد: $sin\ A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}$

من المُثلّث BNA القائم في N نجد: $sin\ A = \frac{BN}{BA}$ ومنه $\frac{BN}{3} = \frac{4}{5}$ بالتّالي $BN = \frac{12}{5}$

نشاط 2





في الشّكلِ المجاورِ:



بيّن أنّ $\cdots = \frac{AB_2}{AC_2} = \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB}{AC}$

(لاحظ أنّ البسوط هي أطوال الأضلاع المجاورة للزّاوية الحادّة A

في المُثلّثات القائمة $\cdots$, ABC , AB_1C_1 , AB_2C_2

وأنّ المقاماتِ هي أطوالُ الأوتارِ في المُثلّثات السّابقة).

أي أنّ نسبةَ طول الضّلع المجاورة للزّاوية الحادّة A إلى طول الوتر في أيّ مُثلّث قائم A إحدى زواياه،

هي نسبةٌ ثابتةٌ نُسمّيها جيب تمام A (أو تجيب A) ونرمّزها $cos\ A$.

تعلّم

- ABC مُثلّث قائمُ الزّاوية في B إنّ:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\text{طول المجاورة}}{\text{طول الوتر}} = cosA.$$



في التطبيق 1 احسب $cos\ A$، ثُمّ احسب AN.

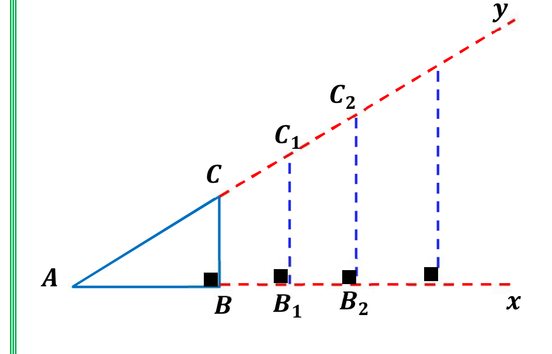


$cosA = \frac{3}{5}$ ومن المثلث BNA القائم في N نجد :

$cosA = \frac{AN}{BA}$ ومنه $\frac{3}{5} = \frac{AN}{3}$ ومنه $AN = \frac{9}{5}$

نشاط 3





بيّن أنّ $\cdots = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{BC}{AB}$

(لاحظ أنّ البسوط هي أطوالُ الأضلاع المقابلة للزّاوية الحادّة A في المُثلّثات القائمة $ABC , AB_1C_1 , AB_2C_2 , \cdots$ وأنّ المقامات هي أطوال الأضلاع المجاورة للزّاوية A في المُثلّثات السّابقة).

أي أنّ نسبةَ طول الضّلع المقابلة للزّاوية الحادّة A إلى طول المجاورة في أي مُثلّث قائم A إحدى زواياه، هي نسبةٌ ثابتةٌ نُسمّيها ظل A ونرمّزها $tan\ A$.





- ABC مُثلّثٌ قائمُ الزّاوية في B إنّ:

$$\frac{BC}{BA} = \frac{\text{طول المقابلة}}{\text{طول المجاورة}} = tanA.$$

تطبيق3

في التطبيق1 احسب $tanA$.

الحل

$$tanA = \frac{BC}{BA} = \frac{4}{3}$$

حاول أن تحلّ

1) المُثلّث ABC قائم الزّاوية في A فيه $AB = 6$, $AC = 3$ والمطلوب:

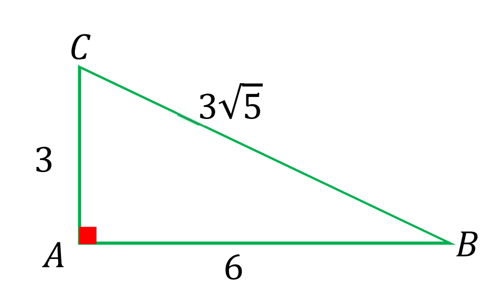
أ. أوجد BC.

ب. أوجد النّسب المُثلّثيّة لـ B.

الحل

أ. حسب فيثاغورث في المثلث ABC نجد :

$$BC = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$



ب.

$$cosB = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$sinB = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$tanB = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2) المُثلّث ABC فيه $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 2\sqrt{13}$

أ. برهن أنّ المُثلّث ABC قائم الزّاوية، ثُمَّ عيّن وتره .

ب. أوجد النّسب المُثلّثيّة لـ C.

الحل

$(AC)^2 = 52$ و $(BC)^2 + (AB)^2 = 16 + 36 = 52$

وحسب عكس مبرهنة فيثاغورث نجد المثلث ABC قائم في B وتره $[AC]$

$$sinC = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$cosC = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$tanC = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

نشاط

تأمّل الشّكلَ المجاورَ ثُمَّ أجب:

أوجد $cosF\ ,\ sinG$ ، ماذا تلاحظ ؟

أوجد $cosG\ ,\ sinF$ ، ماذا تلاحظ ؟

ماذا نُسمِّي الزّاويتين $F\ ,\ G$ ؟

تذكر

متمّمة الزّاوية الحادّة التي قياسها x° هي الزّاوية التي قياسها $(90^{\circ} - x^{\circ})$

الحل

نُسمِّي $F\ ,\ G$ زاويتان متتامتان.

تعلّم

إذا كانت x قياس زاوية حادّة فإنّ: $sin(x) = cos(90^{\circ} - x)$

تطبيق ①

إنّ: $\cos 30^{\circ} = \sin 60^{\circ}$

املأِ الفراغاتِ الآتيةَ: $\cos 18^{\circ} = \sin ....$ $\sin 15^{\circ} = \cos ....,$ $\cos 45^{\circ} = \sin ....,$

تطبيق ②

إذا كانَتْ x قياس زاوية حادّة وأصغر من 70° وكان $\sin x = \cos(x + 20^{\circ})$ فاحسب x.

الحل

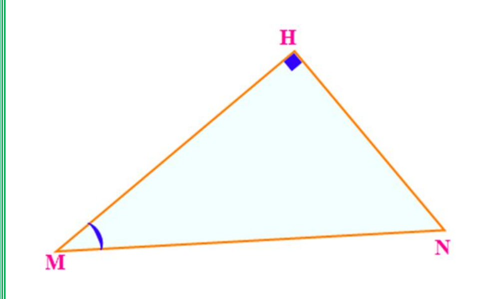
إنّ $x + x + 20^{\circ} = 90^{\circ}$ {علل} ومنه $2x = 70^{\circ}$ إذن $x = 35^{\circ}$



ثانيا علاقات أساسيّة بين النّسب المُثلّثيّة لزاوية

نشاط ①

في الشّكلِ المجاورِ: أكملِ الفراغات:



$$\tan M = \frac{HN}{MH} = \frac{\frac{\dots\dots}{\dots\dots}}{\frac{\dots\dots}{\dots\dots}} = \frac{\sin M}{\cos M}$$

تعلّم

- إذا كانَتْ θ قياس زاوية حادّة فإنّ: $\boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$ ①

تطبيق

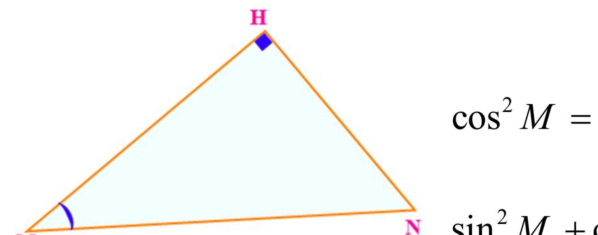
إذا علمْتَ أنّ $\sin A = \frac{1}{2}$, $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، فاحسب $\tan A$

الحل

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

نشاط②

في المُثلّث المجاور



$$\sin^2 M = \left(\frac{HN}{MN}\right)^2 = \frac{HN^2}{MN^2} \quad , \quad \cos^2 M = \left(\frac{\dots\dots}{\dots\dots}\right)^2 = \dots\dots$$

$$\sin^2 M + \cos^2 M = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} + \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{HN^2 + HM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$$

تعلّم

- إذا كانَتْ θ قياس زاوية حادّة فإنّ: $\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$ ②

تُسمّى كلٌّ من العلاقتين ①,② علاقةً أساسيّةً بين النّسب المُثلّثيّة لزاوية.

تفكير ناقد

بعد أن تعرَّفَتْ ياسمين النّسب المُثلّثيّة الأساسيّة لزاوية حادّة A قالت:

إنّ كلاً من $sinA$, $cosA$ هو عددٌ أكبرُ من الصّفر وأصغرُ من الواحد.

وإنّ $tanA$ هو عدد أكبر من الصّفر.

اكتب رأيك بقول ياسمين مع التعليل.

تطبيق

إذا افترضنا أنّ B زاوية حادّة و $cosB = \frac{2}{3}$، فأوجد: $sinB$, $tanB$

طريقة أولى:

اعتماداً على العلاقات الأساسيّة بين النّسب المُثلّثيّة لزاوية:

نعلم أنّ: $sin^2B + cos^2B = 1$ ومنه $sin^2B + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$

أي: $sin^2B + \frac{4}{9} = 1$ ومنه $sin^2B = 1 - \frac{4}{9}$ أي: $sin^2B = \frac{5}{9}$

وهذا يعني وجود حلّين هما: $sinB = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ، $sinB = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

وبما أنّ B زاويةٌ حادّة فإنّ: $sinB = \frac{\sqrt{5}}{3}$ هو الحلّ المقبول

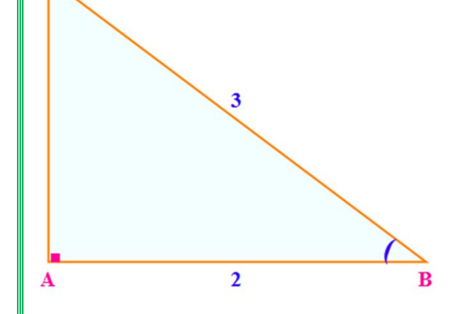
$$tanB = \frac{sinB}{cosB} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

طريقة ثانية:

نرسمُ مُثلّثاً قائماً فيه B زاويةٌ حادّةٌ بحيث تكون نسبةُ طول الضّلع المجاورة للزّاوية B إلى طول الوتر تساوي $\frac{2}{3}$

وليكنِ المُثلّثُ القائم الذي طولُ الضّلع المجاورة للزّاوية B فيه 2، وطول الوتر 3.

كما في الشّكلِ المجاورِ.



حسب مُبرهنة فيثاغورث في المُثلّث القائم نجد: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

بالتعويض $3^2 = 2^2 + AC^2$ ومنه $9 = 4 + AC^2$ ومنه $AC^2 = 5$

وبالتالي $AC = \sqrt{5}$ ومنها $sinB = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ و $tanB = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

ملاحظة

يمكنُ رسمُ مُثلّث قائم فيه B زاوية حادّة وطولُ الضّلع المجاورة 4 وطولُ الوتر 6 لأنّ: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ وهكذا ...

حاول أن تحلّ

1) إذا كانت θ زاوية حادّة وكان $sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، فاحسب $cos\theta\, ,tan\theta$.

الحل

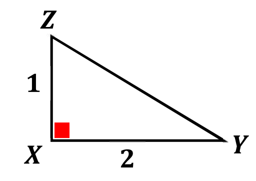
$sin^2\ \theta + cos^2\ \theta = 1$ ومنه $\frac{1}{3} + cos^2\theta = 1$ ومنه

$cos^2\theta = \frac{2}{3}$ و بما أن θ زاوية حادة فإن $cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) إذا كانت y زاوية حادّة وكان $tan\ \ y = \frac{1}{2}$ ، فاحسب $siny\, ,cosy$.

الحل



نرسم مثلث قائم تكون $\hat{y}$ زاوية حادة فيه ونسبة مقابلتها إلى مجاورتها تساوي $\frac{1}{2}$

وليكن المثلث المجاور:

حسب فيثاغورث في هذا المثلث نجد: $zy = \sqrt{5}$ ومنه : $cosY = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $sinY = \frac{1}{\sqrt{5}}$

3) برهن أنّه من أجل أيّ زاوية حادّة قياسها α فإنّ: $(sin\alpha + cos\alpha)^2 + (sin\alpha - cos\alpha)^2 = 2$.

الحل

$$(sin\ \alpha + cos\ \alpha)^2 + (sin\ \alpha - cos\ \alpha)^2$$
$$= sin^2\alpha + cos^2\alpha + 2\, sin\, \alpha\, cos\, \alpha + cos^2\alpha + sin^2\alpha - 2\, sin\, \alpha\, cos\, \alpha = 1 + 1 = 2$$

تحقّق من فهمك

إذا كانت A قياس زاوية حادّة وأصغر من 78° وكان $cos(A + 12^\circ) = sinA$، فاحسب A.

الحل

$A + 12^\circ + A = 90^\circ$ ومنه : $2A = 78^\circ$ إذن : $A = 39^\circ$



أوّلاً النّسب المُثلّثيّة للزّوايا الشّهيرة

نشاط ①

في الشّكلِ المجاورِ:

$AD = 1$ والمطلوب:

- أوجدْ $BA\,, BD$.
- أوجدْ قياسَ الزّاوية $B\hat{A}D$
- احسبْ AC وقياسَ كلّ من الزّاويتين $D\hat{C}A\,, D\hat{A}C$

الحل:

في المثلث ADB نجد : $AB = 2, BD = \sqrt{3}$

$B\hat{A}D = 60^\circ$

حسب فيثاغورث في المثلث ADC نجد: $AC = \sqrt{2}$, $C\hat{A}D = D\hat{C}A = 45^\circ$



نشاط

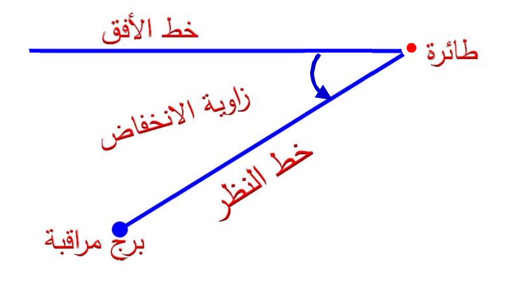
1. في الشّكل المجاور ينظر مُعاذٌ إلى أعلى البُرج

في هذا المنظر لدينا:

خطّ النّظر هو: نصف المستقيم الذي يبدأ بعين الناظر ويمرّ بالشيء المنظور إليه.

خطّ الأفق هو نصفُ المستقيم الأفقي الذي يبدأُ بعين الناظر والعموديّ على شاقول المنظور إليه.

زاوية الارتفاع هي زاوية حادّة ضلع البداية لها هو خطّ الأفق، وضلع النّهاية لها هو خطّ النّظر والمنظور فوق خطّ الأفق، على أن يكون خطُّ الأفق وخطُّ النّظر في مستوٍ شاقولي واحد.



2. في الشّكل المجاور

زاوية الانخفاض هي زاويةٌ حادّةٌ ضلع البداية لها هو خطّ الأفق،

وضلع النّهاية لها هو خطّ النّظر والمنظور تحت خطّ الأفق،

على أن يكونَ خطُّ الأفق وخطّ النّظر في مستوٍ شاقوليّ واحد.

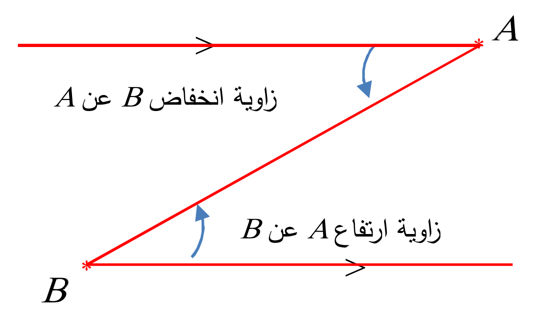
نشاط

يقف شخصان أحدُهما في أعلى قمّة جبل عند النّقطة A

والآخر أسفل الوادي عند النّقطة B،

نظر كلٌّ منهما إلى الآخر في اللّحظة ذاتها

- ارسم زاوية ارتفاع A عن B.
- ارسم زاوية انخفاض B عن A.
- علّل تساوي الزّاويتين السّابقتين.



نشاط ②

بناءً على **النّشاط** ① أكمل الجدول الآتي:

النّسبة \ الزّاوية	30°	60°	45°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1

ملاحظة

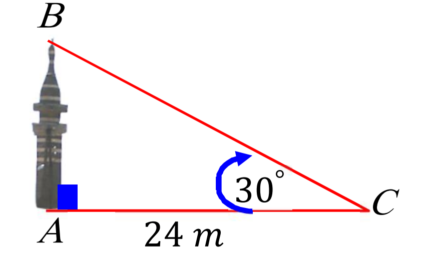
تُستخدمُ قيمُ النّسب المُثلّثيّة الأساسيّة للزّوايا التي قياساتها $30^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ في حلّ التّمارين.



تطبيقات حياتيّة

1) من نقطة على سطح الأرض تبعد 24 متراً عن قاعدة مئذنة وُجدَ أنّ قياس زاويةِ ارتفاع المئذنة 30°، أوجِدِ ارتفاعَ المئذنة.

الحل:



يمكنُ إنشاءُ رسم توضيحيّ للمسألة كما في الشّكل المجاور

من المُثلّث ABC القائم الزّاوية في A نجد:

$tan30^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{24}$ ومنه $AB = 24 \times tan30^\circ$

أي: $AB = 24 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}\, m$ وهو ارتفاع المئذنة.

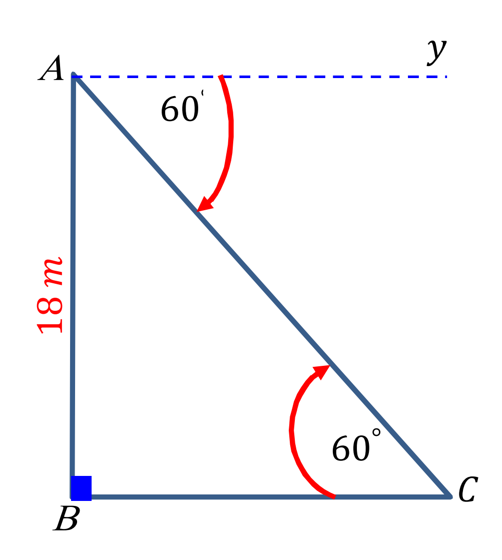
2) يقف رجل على قمّة جرف صخريّ يرتفع عن سطح البحر بمقدار 18 متراً، وقد ربط قاربه بحبل طويل، وبعد فترة رصدَ الرجلُ قياسَ زاوية انخفاض القارب بعد أن أبعدَه التيارُ عن الرّصيف فكانت 60°

أ- احسبْ بُعْدَ القارب عن قاعدة الجرف الصّخري لحظة الرّصد.

ب- احسبْ بُعْدَ الرّجل عن قاربه لحظةَ الرّصد.

الحل:

زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض



الحل:

يمكنُ إنشاءُ رسم توضيحيّ للمسألة

كما في الشّكل المجاور

AB ارتفاعُ الجرف الصّخريّ.

BC المسافةُ بين القارب وقاعدة الجرف الصّخريّ

AC المسافةُ بين القارب والرّجل.

إنّ $y\hat{A}C = A\hat{C}B$ (علّل)

من المُثلّث ABC القائم الزّاوية في B: $tan60° = \frac{18}{BC}$

إذن: $BC = \frac{18}{tan60°} = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}\ m$ وهو بُعْدُ القارب عن قاعدة الجرف لحظةَ الرّصد.

من المُثلّث ABC القائم في الزّاوية B: $sin60° = \frac{18}{AC}$

إذن: $AC = \frac{18}{sin60°} = \frac{18}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}\ m$ وهو بُعْدُ الرّجل عن القارب لحظةَ الرّصد.

حاول أن تحلّ

1. في الشّكل المجاور

$[AB]$ منحدرٌ ارتفاعُهُ $[BD]$

و C نقطة من هذا المنحدر

فإذا كان $AB = 500m\ ,\ BD = 250m$

فارسمْ زاويةَ ارتفاع قمّة المنحدر (B) عن النّقطة C ثُمَّ احسب قياسها.

الحل

$\hat{A} = C'\hat{C}B$ بالتناظر ، $sinA = \frac{250}{500} = \frac{1}{2}$ ومنه $\hat{A} = C'\hat{C}B = 30°$ وهي زاوية ارتفاع قمّة المنحدر B عن النقطة C.

2. شاهدَ طيّارٌ يُحلّقُ على ارتفاع 600 متراً فوق سطح البحر سفينتين في الموقعين $B\ ,\ C$ قياس زاويتي انخفاضهما $30°\ ,\ 45°$ كما في الشّكل الآتي (الطّائرة والسّفينتان في مستوٍ شاقولي واحد)

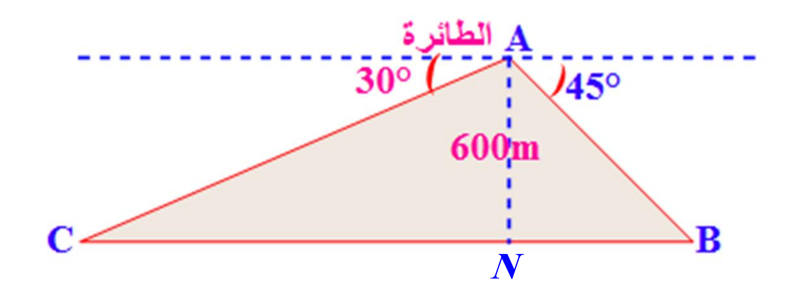
أوجدِ المسافةَ بين السّفينتين

الحل

من المثلث ANB القائم في N نجد: $NB = NA = 600\ m$

من المثلث ANC القائم في N نجد: $tanC = \frac{600}{NC}$ ومنه $\frac{600}{NC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنه $NC = 600\sqrt{3}$

المسافة بين السفينتين: $BC = BN + NC = 600 + 600\sqrt{3} = 600(1+\sqrt{3})\ m$





تمريناتُ الوحـــدة

1. إذا كانت x قياسَ زاويةٍ حادةٍ وكان $24\ tanx = 7$

فاحسب $sinx$ ، $cosx + cos(90^0 - x)$

الحل

نرسم المثلث القائم Tyx كما في الشكل المجاور، حيث x زاوية حادة

فيه الضلع المقابله لها طوله 7 والضلع المجاور لها طوله 24

حسب فيثاغورث في المثلث Tyx نجد $Tx = 25$

ومنه $sinx = \frac{7}{25}$ ، $cosx = \frac{24}{25}$

$$cosx + osx(90^0 - x) = cosx + sinx = \frac{24}{25} + \frac{7}{25} = \frac{31}{25}$$

(أو من المثلث القائم Tyx نجد $y = 90^0$ ومنه الزاوية $90^0 - x$ وهي T

وبالتالي $cos(90^0 - x) = cosT = \frac{7}{25}$)).

2. $[AD]$ سلكٌ طُولُهُ $25\ c.m$ نأخذ عليه النّقطتين B, C بحيث $AB = DC = 10\ cm$

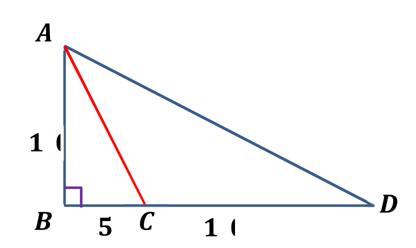
نثني السّلك عند B بحيث $[AB] \perp [BD]$ والمطلوب:

a) احسب AD , AC.

b) احسب $sin\ A\hat{C}B$ ، $cos\ D$.

c) احسب $tan\ B\hat{A}C$ ، $cos\ B\hat{A}D$.

الحل



a) حسب فيثاغورث في المثلث ABC نجد: $AC = 5\sqrt{5}$

حسب فيثاغورث في المثلث ABD نجد: $AD = 5\sqrt{13}$

b) $sin\, A\hat{C}B = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

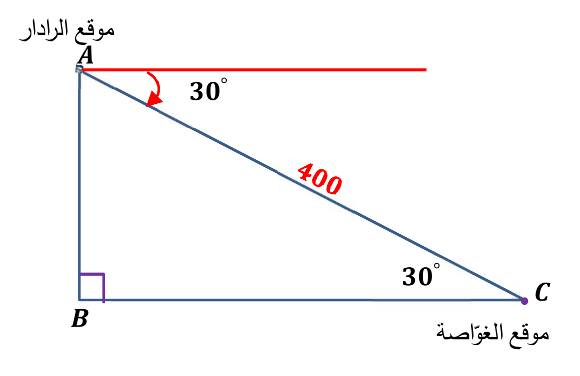
$cosD = \frac{15}{5\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

c) $tan\, B\hat{A}\, C = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ، $cos\, B\hat{A}\, D = \frac{10}{5\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

3. رَصَدَ رادارٌ على سفينة حربيّة غوّاصة على بعد 400 متر

تحت سطح الماء وبزاوية انخفاض قياسها 30^0.

احسبْ عمقَ الغوّاصة تحت سطح الماء لحظة الرّصد.



الحل

من المثلث القائم ABC نجد:

$sin\ 30^0 = \frac{AB}{400}$ ومنه $\frac{1}{2} = \frac{AB}{400}$

إذن $AB = 200\ M$ وهو عمق الغواصة تحت سطح الماء لحظة الرصد.

الوحـــــدة الثّانيــة

النســـب المثلثيـــة للزاويـــة الحـــادة والقيـــاس غـــير المباشـــر

(الدّرس 1 – 2)

.1 تأمل الشكل المجاور:

حيث: $BC = 12$

– احسب AD

– احسب $sin\ B\ ,\ cos\ C$.

– احسب $\cos C\hat{A}D\ ,\ \tan B\hat{A}D$.



الحل

$[AD]$ ارتفاع متعلق بالقاعدة في مثلث متساوي الساقين

فهو متوسط لها ومنه $DB = DC = 6$

حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث ADB نجد: $AD = 8$ وبالتالي: $sin\ B = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}\ ,\ cosC = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$tanB\hat{A}D = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}\ ,\ cosC\hat{A}D = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

.2 إذا كانت $\hat{x}$ زاوية حادّة بحيث: $\tan x = \frac{2}{5}$ أوجد: $\sin x\ ,\ \cos x$.

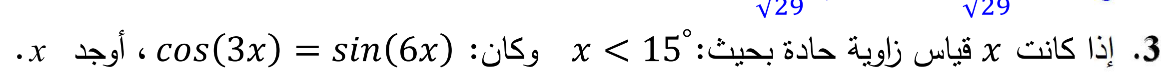
الحل

نرسم مثلث قائم تكون فيه $\hat{x}$ زاوية حادة ونسبة مقابلتها

إلى مجاورتها $\frac{2}{5}$ كما في الشكل المجاور.

وحسب مبرهنة فيثاغورث نجد: $Ax = \sqrt{29}$.

ومنه: $sin\ x = \frac{2}{\sqrt{29}}\ ,\ cos\ x = \frac{5}{\sqrt{29}}$



.3 إذا كانت x قياس زاوية حادة بحيث: $x < 15^\circ$ وكان: $cos(3x) = sin(6x)$ ، أوجد x.

الحل

$cos(3x) = sin(6x)$ إذن $3x, 6x$ زاويتان متتامتان

وهذا يعني: $3x + 6x = 90^\circ$ ومنه: $x = 10^\circ$

4. في الشكل المرسوم جانباً

$ABCD$ مستطيل فيه $AM = EM = 2\,,M\hat{A}B = 30^{\circ}$ والمطلوب:

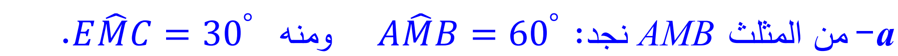
a- برهن أنّ: $D\hat{E}A = 75^{\circ}, E\hat{A}D = 15^{\circ}$.

b- احسب كلاً من: $AB\,,MB\,,EA\,,AD\,,ED\,,MC$.

c- أكمل الجدول الآتي:

الزاوية / النسبة	15°	75°
sin		
cos		
tan		

الحل



a- من المثلث AMB نجد: $A\hat{M}B = 60^{\circ}$ ومنه $E\hat{M}C = 30^{\circ}$.

ومن المثلث ECM نجد: $C\hat{E}M = 60^{\circ}$ ولكن $M\hat{A}E = M\hat{E}A = 45^{\circ}$.

إذن: $\left.\begin{array}{l} D\hat{E}A = 180^{\circ} - (45^{\circ} + 60^{\circ}) = 75^{\circ} \\ D\hat{A}E = 90^{\circ} - (30^{\circ} + 45^{\circ}) = 15^{\circ} \end{array}\right\}$

b- حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث AEM نجد: $AE = 2\sqrt{2}$.

ومن المثلث AMB نجد: $MB = 1$ ومنه $AB = \sqrt{3}$.

c- من المثلث EMC نجد: $EC = 1\,, MC = \sqrt{3}$

ومنه $\left.\begin{array}{l} ED = DC - EC = \sqrt{3} - 1 \\ DA = BC = BM + MC = \sqrt{3} + 1 \end{array}\right\}$

الزاوية / النسبة	15°	75°
sin	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
cos	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
tan	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

(الدّرس 2 – 2)

1. يستخدمُ رجالُ الإطفاءِ سلالمَ طويلةً للوصول إلى الطبقات العُليا من الأبنية في الشكل المرسوم جانباً سلّم إطفاء طوله $15\ m$ يستند إلى جدار منزل $[AB]$ ويصنع معه زاويةً قياسها 30° والمطلوب:

a– أوجد ارتفاعَ جدارِ المنزلِ.

b– احسب BC.

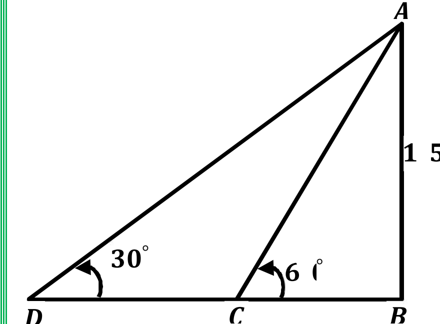
الحل

a) $cos\ 30^\circ = \frac{AB}{15}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{15}$ ومنه $AB = \frac{15\sqrt{3}}{2}\ m$ وهو ارتفاع الجدار.

b) $sin\ 30^\circ = \frac{BC}{15}$ ومنه $\frac{BC}{15} = \frac{1}{2}$ وبالتالي $BC = 7.5\ m$.

2. قمّةُ جبلٍ ارتفاعها $1530\ m$ ورجلٌ في قارب يتحرّك مبتعداً عن الجبل، فإذا كان قياس زاوية ارتفاع قمة الجبل في لحظة ما 60° أصبحت بعد دقيقتين 30°، احسب سرعة القارب.



الحل

$tan\ 60^\circ = \frac{1530}{CB}$ ومنه $\sqrt{3} = \frac{1530}{CB}$

$CB = \frac{1530}{\sqrt{3}} = \frac{1530\sqrt{3}}{3} = 510\sqrt{3}\ m$

$tan\ 30^\circ = \frac{1530}{BD}$ ومنه $\frac{1530}{BD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ وبالتالي $BD = 1530\sqrt{3}\ m$

المسافة المقطوعة خلال دقيقتين هي: $1530\sqrt{3} - 510\sqrt{3} = 1020\sqrt{3}\ m$

السرعة = $\frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{الزمن اللازم لقطعها}}$ أي: $v = \frac{d}{t} = \frac{1020\sqrt{3}}{2} = 510\sqrt{3}\ m \cdot min^{-1}$



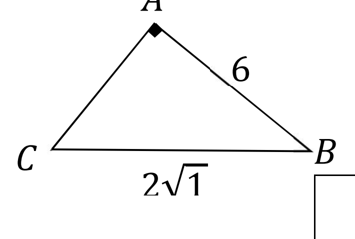
اختبار الوحدة الرابعة (الهندسة)

أولاً : صنافة الاختبار:

الفهم	السؤال	الإجراء	السؤال
يعرف نسب المثلثية لزاوية حادة	$1+2\ (b+c)$	حساب النسب المثلثية لزاوية حادة	$2\ (b+c)$
يعرف بعض العلاقات بين النسب المثلثية لزاوية	3	يستفيد من النسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم في حساب الأطوال	$2\ (b)$
		يُحدد زوايا الارتفاع والانخفاض	$4+5\ (a)$
		يحسب الأطوال بشكل غير مباشر اعتماداً على زوايا الارتفاع والانخفاض	$4+5\ (b)$

ثانياً: الاختبار:

السؤال الأول:



تأمل الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة:

$sinB$ يساوي:

$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{\sqrt{13}}$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{1}{\sqrt{13}}$

$tanC$ يساوي:

$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{\sqrt{13}}$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{2}{3}$

السؤال الثاني:

ABC مثلث أطوال أضلاعه $AB=6, BC=4, AC=2\sqrt{5}$ والمطلوب

a) برهن أنَّ هذا المثلث قائم ثُمَّ ارسمه

b) بفرض N نقطة تلاقي الارتفاع المتعلّق بالوتر مع هذا الوتر فاحسب $sinB, cosA, AN, CN$

c) احسب كلاً من : $cosN\hat{C}B, tanN\hat{C}A$

السؤال الثالث:

إذا كانت α زاوية حادة و $sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ احسب كلاً من $tan\alpha, cos\alpha$

السؤال الرابع:

من نقطة C تبعد 40 متراً عن قاعدة مبنى وَجدَ سامر أنَّ زاوية ارتفاع المبنى 60° والمطلوب:

a) ارسم زاوية ارتفاع المبنى عن سامر

b) احسب ارتفاع المبنى

السؤال الخامس:

أراد رجل قياس عرض نهر يمر من أمام منزله فوقف على سطح المنزل الذي يرتفع 18متراً ووجد أنَّ قياس زاوية انخفاض حجر (C) على الضفة البعيدة للنهر 30° وأنَّ قياس زاوية انخفاض حجر (D)على الضفة القريبة للنهر 60° ، فإذا علمت أنَّ الحجرين $(D),(C)$ وقاعدة المنزل على استقامة واحدة

a) ارسم شكلاً توضيحياً للمسألة

b) احسب عرض النهر

انتهت الأسئلة

الزّاويـــــــة المركزيّـــــــة وقيــــــاس القـــــوس

مُنظِّم الدّرس (3 – 1)

أهداف الدّرس

التّعرُّف على القوس في دائرة.
التّعرُّف على الزّاوية المركزيّة في دائرة.
ربط قياس الزّاوية المركزيّة بقياس قوسها.

المفردات والمصطلحات الجديدة

الزاوية المركزية في دائرة

مُستلزمات الدّرس

كتابي الطالب والأنشطة – أدوات هندسية

ســـــــــــيـر الــــــــــــدّرس

التّمهيـــــــــــــــد

اطلب من المجموعات تنفيذ النّشاط والفقرة الأولى صفحة 45 والاستعانة بالتّذكُّر الموجود في ذات الصّفحة عند الضّرورة.

التّــــــــــــدريس

ارسم على السّبورة دائرة مركزها (O) وارسم نصفي المستقيمين $[Oy), [Ox)$

الذين يقطعان الدّائرة في B, A على التّرتيب وعيِّن النّقطة N على القوس الكُبرى

سمِّ $x\hat{o}y$ زاوية مركزيّه والقوس $\overset{\frown}{AB}$ القوس المقابلة لها (أو اختصاراً قوس $x\hat{o}y$)

سمِّ الزّاوية المُنعكسة $x\hat{o}y$ زاوية مركزيه منعكسة والقوس $\overset{\frown}{ANB}$ القوس المقابلة لها

(أو اختصاراً قوس الزّاوية المركزيّة المُنعكسة $x\hat{o}y$)

اكتب على السّبورة إنَّ قياس الزّاوية المركزيّة يساوي قياس قوسها وأكِّد على ذلك بسؤال أكثر من طالب،

اطلب من مجموعات العمل تنفيذ حاول أن تحلّ (1) صفحة (48) كتقويم مرحلي على هذه الفقرة.

وضّح النّشاط صفحة (46) واطلب من المجموعات تنفيذ النّشاط مستعينين بالتّذكُّر الموجود في نفس الصّفحة وصولاً للتّعلُّم المطلوب (للتّأكيد يمكنك تثبيت هذا التعلّم على السّبورة) ،

اطلب من المجموعات تنفيذ التّطبيق (2) صفحة (48) كتقويم مرحلي على هذه الفقرة

الخاتمـــة والتّقيـــيم

اسأل: إذا تساوى قياسا قوسين في دائرتين مختلفتين فهل يتساوى طولا وتريهما ؟

تمـــــــــــــــرّن

الواجب المنزلي: التّمرين (2) من حاول أن تحلّ في كتاب الطّالب.

التّمارين (3 + 1) من تمارين الدّرس في كتاب الأنشطة.

الوحــــــــدة الثّالثـــــــــة

الـــــــــــــــــــدّائرة

محتوى الوحدة

- الزّاوية المركزيّة وقياس القوس.
- المستقيم والدّائرة.
- الزّاوية المحيطيّة والزّاوية المماسيّة في الدّائرة.
- الرّباعي الدّائري.
- إنشاءُ مماسّ لدائرة.

الدّائرةُ أقدمُ شكلٍ هندسيّ، استخدمهُ القُدماءُ في حياتهم اليوميّة فصنعوا عجلات مركباتهم والأواني الفخّاريّة وأقواس الرّمي، وللدّائرة تطبيقاتٌ متعدّدةٌ في رسم المماسّ لها من إحدى نقاطها وتبيان العلاقة بين الزّاوية المماسيّة والزّاوية المحيطيّة والزّاوية المركزيّة كلّ ذلك بأسلوب فكريّ شائق يُمتع الطالب والباحث.

1 - 3 الزّاويــــة المركزيــــة وقيـــاس القـــوس

سوف تتعلّم

- الأقواس في الدّائرة.
- الزّاوية المركزيّة في الدّائرة.
- العلاقة بين قياس الزّاوية المركزيّة وقياس القوس المقابلة لها.



نشاط

في الشّكل المرسوم جانباً

رمِّز الدّائرة.

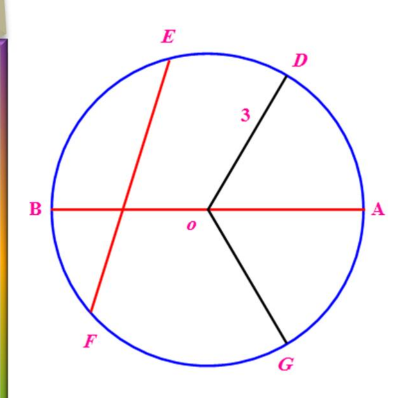
سمِّ وتراً في الدّائرة.

سمِّ قطراً في الدّائرة.

سمِّ نصفَ قطر في الدّائرة.

احسب AB , oG.

احسب محيطَ الدّائرة بدلالة π.



تذكّر

- الوترُ في دائرة هو قطعةٌ مستقيمة تصل بين نقطتين مختلفتين من الدّائرة.
- نصف قطر دائرة هو قطعةٌ مستقيمة تصل بين نقطة من الدّائرة ومركزها ونرمِّز إلى طوله بـ R.
- قطر الدّائرة هو وتر يمرّ بمركزها ونرمِّز إلى طوله بـ d أي أنّ $d = 2R$
- إذا كان مركزُ الدّائرة o وطول نصف قطرها R فنرمِّز إلى الدّائرة بـ $C(o , R)$ أو اختصاراً C.
- قطرُ الدّائرة هو محورُ تناظر لها ومركز الدّائرة مركز تناظر لها.
- يُرمَّزُ إلى محيطُ الدّائرة بالرّمز P ونعلم أنّ: $P = \pi d$ أو $P = 2\pi R$

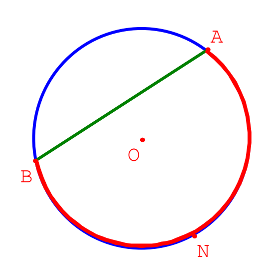
أولاً: الأقواس في الدّائرة

في الشّكل المجاور:

$C(o , R)$ دائرة ، A , B نقطتان مختلفتان منها، إنّ هاتين النّقطتين تقسمان الدّائرة إلى قسمين، نُسمِّي كلاً منهما قوساً من دائرة

ونرمِّز إلى القوس الصّغرى بـ $\overset{\frown}{AB}$ ونختار نقطة ولتكن N على القوس الكبرى ونرمِّز إليها $\overset{\frown}{ANB}$

وترُ القوس: في الشّكل المجاور

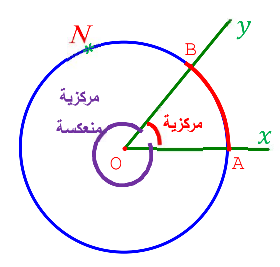


$[AB]$ وترٌ لكلّ من القوسين $\overset{\frown}{AB}$ ، $\overset{\frown}{ANB}$

ثانياً: الزاوية المركزية في الدائرة



في الشّكل المجاور:



رسمنا نصفي المستقيمين $[ox)$, $[oy)$ فقطعا الدّائرة

في النّقطتين A ,B على التّرتيب وبالتّالي نحصل على زاويتين.

- الزّاوية المركزيّة $x\hat{o}y$ تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$ من الدّائرة

(ويمكن أن نقول إنّ $\overset{\frown}{AB}$ تقابل $x\hat{o}y$)

- الزّاوية المركزيّة المُنعكسة $x\hat{o}y$ تحصر القوس $\overset{\frown}{ANB}$ من الدّائرة (**ويمكن أن نقول إنّ** $\overset{\frown}{ANB}$ **تقابل المُنعكسة** $x\hat{o}y$)

تُقاس القوس بقياس الزّاوية المركزيّة التي تحصرها.

ملاحظة: سمّينا كلاً من الزّاوية $x\hat{o}y$ والزّاوية المُنعكسة $x\hat{o}y$ مركزيّة لأنّ رأس كلّ منها هو مركز الدّائرة.

ثالثاً: معلومات في الدائرة

نشاط

تأمّل الشّكل المرسوم جانباً ثُمّ أجب عن أسئلة الآتية:

- ما قياس $\overset{\frown}{AB}$ ؟
- ما قياس $\overset{\frown}{DC}$ ؟
- إنّ $\overset{\frown}{DC}$ صورة $\overset{\frown}{AB}$ بالدّوران الذي مركزه o وزاويته $A\hat{o}D$ بالاتجاه المباشر. {علِّل}

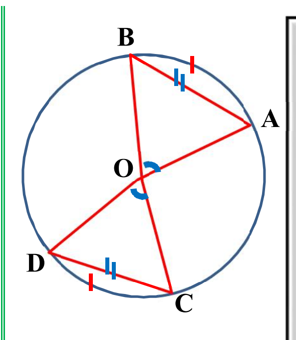
إذن $\overset{\frown}{DC}$, $\overset{\frown}{AB}$ طبوقتان لأنّ الدّوران تَقايُس.

إنّ $[AB]$ (وتر $\overset{\frown}{AB}$) طبوق على $[DC]$ (وتر $\overset{\frown}{DC}$)

لأنّ أحدهما صورة للآخر بالدّوران السّابق.

تذكّر

1. إذا كانَ أحدُ الشّكلين صورة للآخر وفق تقايس (دوران ، انسحاب ، ...) كانا طبوقين.
2. الدّوائر المتّحدة المركز هي دوائرُ لها المركز ذاتُهُ وأنصاف أقطارها مختلفة.
3. الدّائرتان الطبوقتان: دائرتان تساوى طولا نصفي قطريهما.
4. كلّ قطر في دائرة يَقسِمُها إلى قوسين طبوقتين قياسُ كلّ منهما 180°.



تعلّم

- إذا كان لقوسين في دائرةٍ القياسُ ذاتُهُ، كانتا طبوقتين.
- إذا كان لزاويتين مركزيّتين في دائرةٍ القياسُ ذاتُهُ، فإنّ القوسين المقابلتين لهما طبوقتان.
- إذا تطابق قوسان في دائرة تطابق وتراهما.
- إذا تطابق وتران في دائرة تطابق قوساهما.

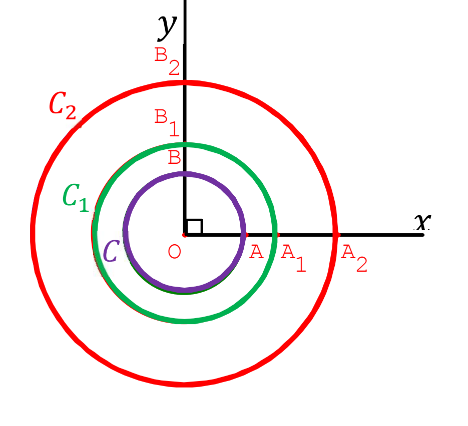


ملاحظة



يُرمَّزُ قياس القوس برمز القوس للسهولة

تطبيق ①



في الشّكل المجاور ثلاثُ دوائرَ متّحدة بالمركز:

$x\hat{o}y = 90^\circ \, , C(0,2) \, , C_1(0,3) \, , C_2(0\,,5)$

1. احسبْ قياسَ كلّ من الأقواس $\overset{\frown}{A_2B_2} \, , \overset{\frown}{A_1B_1} \, , \overset{\frown}{AB}$.
2. احسبْ أطوالَ كلّ من الأقواس السّابقة

(طولُ كلّ قوس يساوي ربعَ طول قوس الدّائرة)

3. اكتبْ نتيجةً لما توصّلتَ إليه من 1،2

الحل

1. الأقواس $\overset{\frown}{A_2B_2} \, , \overset{\frown}{A_1B_1} \, , \overset{\frown}{AB}$ تقابل زاوية مركزيّة قياسها 90° في الدّوائر $C(0,2) \, , C_1(0,3) \, , C_2(0\,,5)$ على التّرتيب

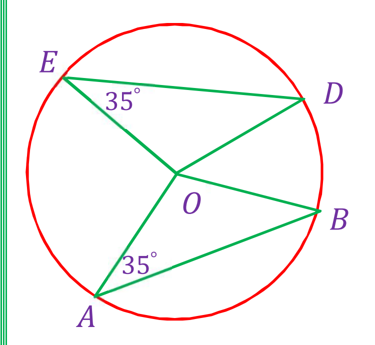
إذن $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A_1B_1} = \overset{\frown}{A_2B_2} = 90^\circ$

2. طول $\overset{\frown}{AB}$: $\frac{1}{4}(2\pi \times 2) = \pi$

طول $\overset{\frown}{A_1B_1}$: $\frac{1}{4}(2\pi \times 3) = \frac{3}{2}\pi$

طول $\overset{\frown}{A_2B_2}$: $\frac{1}{4}(2\pi \times 5) = \frac{5}{2}\pi$

3. قد يكون للأقواس القياسُ ذاتُهُ لكنّ أطوالها مختلفة.



تطبيق②

في الشّكل المجاور برهن أنّ القوسين $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{ED}$ طبوقتان

وأنّ الوترين $[ED]$, $[AB]$ طبوقان.

الحل

BOA مثلث متساوي السّاقين، ومنه: $\hat{A} = \hat{B} = 35^\circ$ و $A\hat{O}B = 110^\circ$

وبذات الطريقة نجد: $E\hat{O}D = 110^\circ$ ومنه $\overset{\frown}{AOB} = \overset{\frown}{EOD} = 110^\circ$

(إذا تطابقت زاويتان مركزيتان في دائرة تطابقت قوساهما)

ومنه: $AB = ED$ (إذا تطابقت قوسان في دائرة تطابق وتراهما)

حاول أن تحلّ



1. في الشّكل المجاور

لدينا $B\hat{o}N = 2A\hat{o}N$

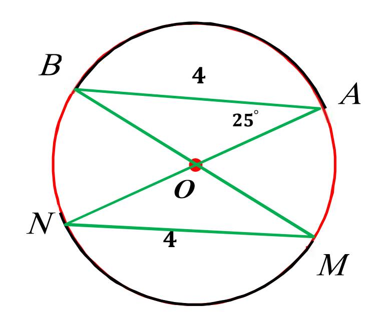
أوجدْ قياسَ كلٍّ من القوسين $\overset{\frown}{NB}$, $\overset{\frown}{AN}$



الحل

$B\hat{O}A = 180^\circ$ ومنه $B\hat{O}N + N\hat{O}A = 180^\circ$ إذاً $2A\hat{O}N + A\hat{O}N = 180^\circ$

ومنه $3A\hat{O}N = 180^\circ$ إذاً $N\hat{O}A = 60^\circ, B\hat{O}N = 120^\circ$



2. في الشّكل المجاور

- أوجدْ قياسَ الزّاوية $M\hat{o}N$
- أوجدْ قياسَ القوس $\overset{\frown}{AM}$

الحل

من المثلث BOA نجد $B\hat{O}A = 130^\circ$ ومنه $N\hat{O}M = 130^\circ$ إذاً $\overset{\frown}{NM} = \overset{\frown}{AB} = 130^\circ$ و $A\hat{O}M = B\hat{O}N$ بالتقابل بالرأس ومنه

$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BN}$ وبما أنّ $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BN} + \overset{\frown}{NM} + \overset{\frown}{AM} = 360^\circ$ ومنه

$2 \times 130^\circ + 2 \times \overset{\frown}{AM} = 360^\circ$ ومنه $\overset{\frown}{AM} = 50^\circ$

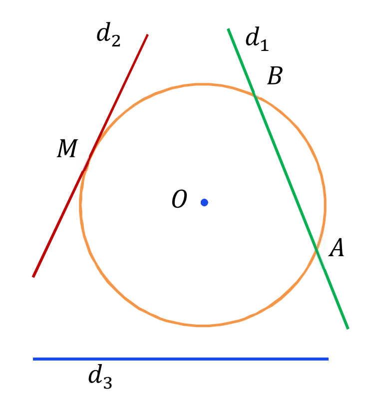


2 - 3 المســـــتقيم والــــــــــدّائرة

سوف تتعلّم

- الأوضاع المختلفة لمستقيم ودائرة.
- بعض خواص الأوتار في دائرة.
- إنشاء دائرة مارّة بثلاث نقاط ليستْ على استقامة واحدة.

أولاً: الأوضاع المختلفة لمستقيم ودائرة



نشاط

تأمّل الشّكل المجاور ثُمّ أجب عن الأسئلة الآتية:

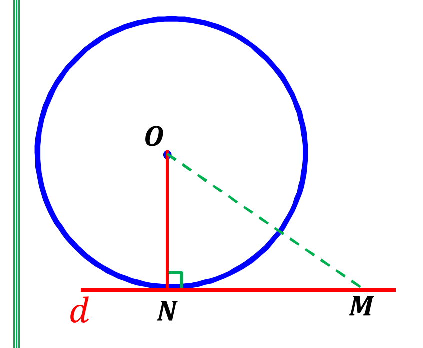
- ما المستقيمُ الذي يشتركُ معَ الدّائرة في النّقطتين A, B ؟
- ما المستقيمُ الذي يشتركُ مع الدّائرة في النّقطة الوحيدة M ؟
- ما المستقيمُ الذي لا يشترك مع الدّائرة في أيّة نقطة ؟

تعلّم

- المستقيمُ الذي يشتركُ مع الدّائرة في نقطتين مختلفتين يُسمّى قاطعاً لها.
- المستقيمُ الذي يشتركُ مع الدّائرة في نقطة واحدة يُسمّى مماساً لها في هذه النّقطة.
- المستقيمُ الذي لا يشتركُ مع الدّائرة في أيّة نقطة يُسمّى مستقيماً خارج الدّائرة.

مبُرهنة

إذا كانت $N \in C(O, R)$ فإنّ المستقيمَ العموديّ على (ON) في النّقطة N مماسّ للدّائرة.



الفرض: $N \in C$ ، $d \perp (ON)$ في النّقطة N

الطّلب: برهن أنّ d مماسّ لهذه الدّائرة

البُرهان: نأخذُ نقطةً اختياريّة من d ولتكن M مختلفة عن N ونرسم $[OM]$

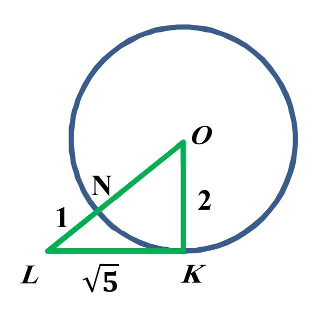
في المُثلّث القائم ONM نعلم أن طول الوتر أكبر من طول أي ضلع قائمة،

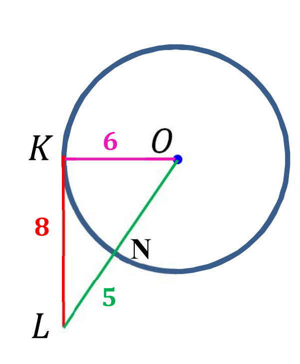
إذن $OM > ON$ أي $OM > R$ فالنّقطة M تقع خارج الدّائرة.

وبما أنّ M اختياريّة فإنّ d يشترك مع الدّائرة في النّقطة N فقط، فهو مماسّ للدّائرة في هذه النّقطة.

تطبيق

بيّن فيما إذا كان (KL) مماسّاً للدّائرة $C(O, OK)$ في كلٍّ من الشّكلين الآتيين:

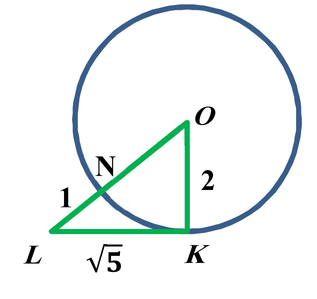






الحل

في الشكل المجاور:

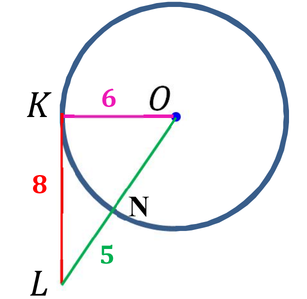


$3^2 = 2^2 + \sqrt{5}^2$ لأنَّ $OL^2 = OK^2 + LK^2$

وبالتالي حسب عكس فيثاغورث المثلث OLK قائم في K ومنه $(LK) \perp [OK]$

ومنه (LK) مماس للدائرة في K .

في الشكل المجاور:

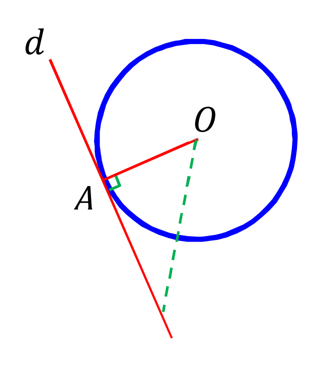


$11^2 \neq 6^2 + 8^2$ لأنَّ $OL^2 \neq OK^2 + LK^2$

ومنه (KL) لايعامد $[OK]$ في K ومنه (LK) ليس مماس للدائرة في K .

مُبرهنة العكس

إذا كانَ المستقيمُ d مماسّاً للدّائرة $C(O,R)$ في النّقطة A فإنّ $d \perp (OA)$ في النّقطة A



تحقّق من فهمك

استنتجْ طريقةً لرسم المماسّ لدائرة في نقطة منها.

ما عددُ المماسّاتُ التي يمكن رسمُها بالطّريقة السّابقة ؟ ﴿علِّل﴾.

ثانياً: خواص للأوتار في الدائرة

نشاط①

في الشّكل المجاور:

$C(O,R)$ دائرةٌ ، $[AB]$ وترٌ فيها ، $(ON) \perp [AB]$ ، ارسم $[OA]$ ، $[OB]$

أجب عنِ الأسئلة الآتية:

إنّ $OA = OB$ ﴿علِّل﴾

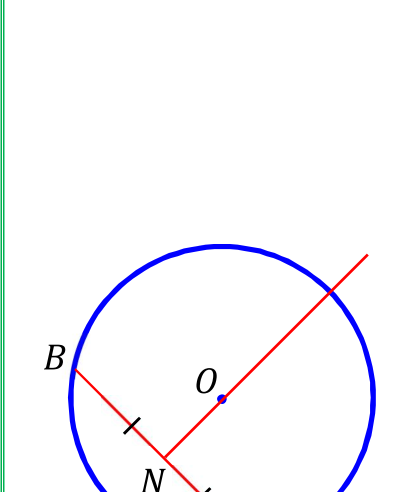
ما نوعُ المُثلّث OAB ؟ ﴿علِّل﴾

هل $[ON]$ مُتوسّط مُتعلّق بالقاعدة $[AB]$ ؟ ﴿علِّل﴾

تعلّم

◉ المستقيمُ المارُّ بمركز دائرة عموديّاً على وتر فيها ينصّفُ ذلك الوترَ.

نشاط②



في الشّكل المجاور: $C(O,R)$ دائرةٌ ، $[AB]$ وترٌ فيها ، N منتصف $[AB]$

ارسم $[OA]$ ، $[OB]$ ثُمَّ أجب عن الأسئلة الآتية:

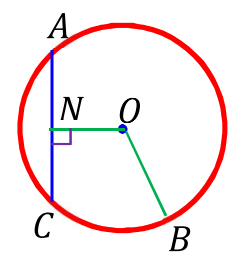
ماذا سمّينا $[ON]$ في المُثلّث OAB ؟

هل $[ON]$ ارتفاعٌ مُتعلّق بالقاعدة $[AB]$ ؟ ﴿علِّل﴾

تعلّم

◉ المستقيمُ المارّ بمركز دائرة ومنتصفِ وتر فيها، عموديّ على ذلك الوتر.

تطبيق



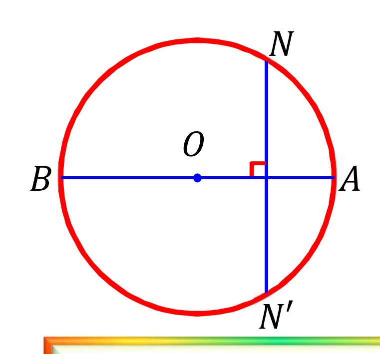
في الشّكل المرسوم جانباً $C(O,10)$ دائرة $AC = 12$ احسب ON.

الحل

$(ON) \perp [AC]$ ومنه $AN = CN = 6$ ومن المثلث ONC نجد:

$$ON = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

نشاط 3



في الشّكل المجاور

$C(O,R)$ دائرةٌ ، $[NN']$ وترٌ فيها و $[AB] \perp [NN']$

أجب عن الأسئلة الآتية:

- (AB) محور $[NN']$ **علّل**.
- ما صورةُ الدّائرة C بانعكاس نسبة إلى (AB) ؟
- ما صورةُ النّقطة N بانعكاس نسبة إلى (AB) ؟
- ما صورةُ النّقطة A بانعكاس نسبة إلى (AB) ؟
- ما صورةُ $\overset{\frown}{AN}$ بانعكاس نسبة إلى (AB) ؟
- إنّ $\overset{\frown}{AN}$ ، $\overset{\frown}{AN'}$ طبوقتان **علّل**.
- بالمثل نجد أنّ $\overset{\frown}{BN}$ ، $\overset{\frown}{BN'}$ طبوقتان.



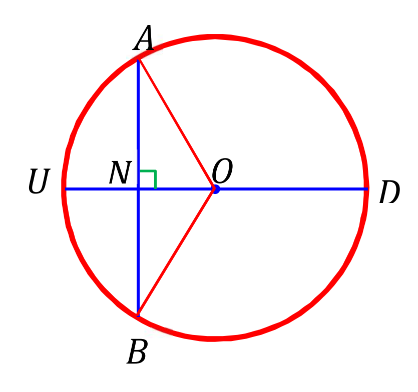
لرسم صورة قوس من دائرة بانعكاس نسبة إلى مستقيم نتّبع الآتي:

1. نرسمُ صورةَ الدّائرة.
2. نرسمُ صورتي طرفي القوس فتكون القوس النّاتجةُ هي صورة هذه القوس.

تعلّم

قطرُ الدّائرة العموديّ على وترِ قوس فيها، يُنصّف تلك القوس (يقسمها قسمين طبوقين)

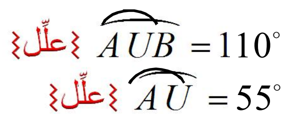
تطبيق



تأمّل الشّكلَ المرسوم جانباً حيث $A\hat{O}B = 110^\circ$

ثُمّ أوجدْ قياس $\overset{\frown}{AU}$ وقياس $\overset{\frown}{AD}$، وما قياسُ الزّاوية المُنعكسة $A\hat{O}B$ ؟

الحل

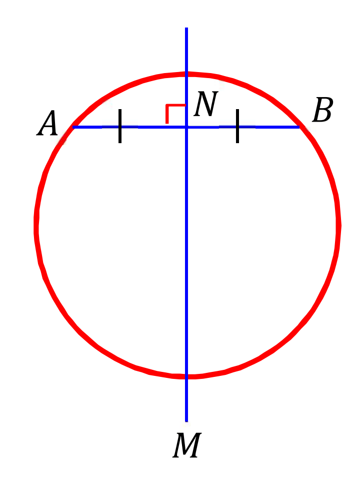


$\overset{\frown}{AUB} = 110^\circ$ ﴿علّل﴾

$\overset{\frown}{AU} = 55^\circ$ ﴿علّل﴾

$\overset{\frown}{AD} = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$ ﴿علّل﴾ ، $A\hat{O}B = 360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$ ﴿علّل﴾

نشاط 4



في الشّكل المجاور

(MN) محور الوتر $[AB]$

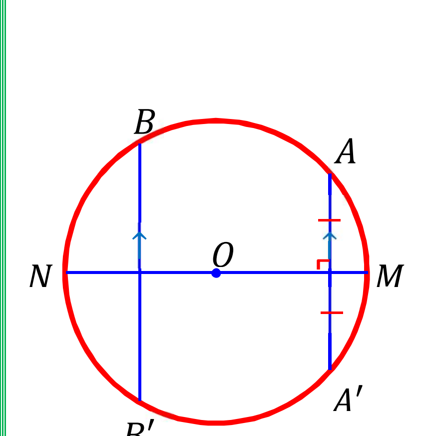
هل مركز الدّائرة متساوي البعد عن النّقطتين A,B ؟

أين يقع مركز هذه الدّائرة ؟

تعلّم

- محورُ أيّ وتر في الدّائرة يمرّ بمركزها.

تطبيق



يُريدُ سامر تعيينَ مركز طاولة دائريّة الشّكل وذلك لتثبيت عمود مظلّة فيه،

باستخدام التّعلّم السّابق كيف يمكنكَ مساعدته على ذلك؟

الحل

يختار سامر ثلاث نقاط من إطار الطاولة الدائرية ويرسم محوري وترين ناتجين عن هذه النقاط،
نقطة تقاطع هذا المحورين هي مركز الطاولة الدائرية.

نشاط 5

B
A
N
O
M
A′
B′

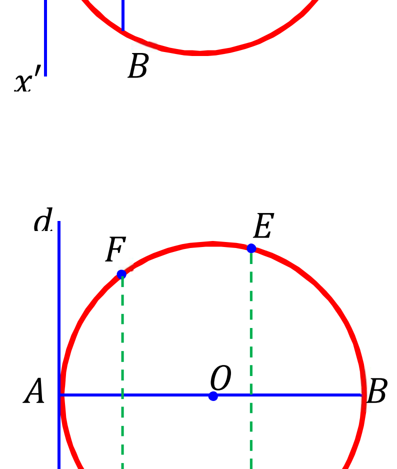
تأمّل الشّكل المجاور: حيث $C(O,R)$ دائرة فيها الوتران $[BB'],[AA']$

متوازيان ورسمنا (MN) محور $[AA']$ ثُمّ أجب:

- برهن أنّ (MN) محور $[BB']$.
- ما صورةُ الدّائرة C بانعكاسٍ نسبةً إلى (MN) ؟
- ما صورةُ النّقطة A بانعكاسٍ نسبةً إلى (MN) ؟
- ما صورةُ النّقطة B بانعكاسٍ نسبةً إلى (MN) ؟
- ما صورةُ القوس $\overset{\frown}{AB}$ بانعكاسٍ نسبةً إلى (MN) ؟
- إنّ القوسين $\overset{\frown}{A'B'}$, $\overset{\frown}{AB}$ طبوقتان، **علّل؟**

تعلّم

الوتران المتوازيان في دائرة يحصران قوسين طبوقتين.



نتيجة: القوسان المحصورتان بين وتر دائرة ومماسّ يوازيه طبوقتان.

في الشّكل المجاور

$C(O,R)$ دائرةٌ ، $[AB]$ وترٌ فيها

وَ (xx') مماسّ لها في النّقطة N وَ $(xx') /\!/ (AB)$

إذن القوسان $\overset{\frown}{NB}$, $\overset{\frown}{NA}$ طبوقتان.

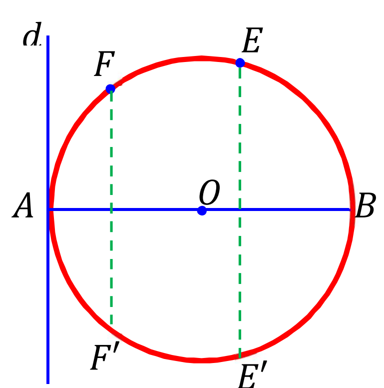


$C(O,R)$ دائرةٌ ، $[AB]$ قطرٌ فيها، d مماسّ الدّائرة في النّقطة A ،

القوسان $\overset{\frown}{AF}$, $\overset{\frown}{FE}$ طبوقتان، وتقعان في جهة واحدة نسبة إلى القطر $[AB]$ ،

الوتران $[EE'],[FF']$ عموديان على $[AB]$ ،

برهن أنّ $\overset{\frown}{AE'} = 2\,\overset{\frown}{AF'}$.





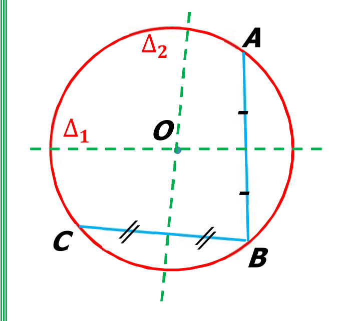
$\overset{\frown}{AF'} = \overset{\frown}{AF}$ {علّل}

$\overset{\frown}{F'E'} = \overset{\frown}{FE}$ {علّل}

$\overset{\frown}{AE} = 2\,\overset{\frown}{AF}$ إذن $\overset{\frown}{AE'} = 2\,\overset{\frown}{AF'}$

ثالثاً: إنشاء دائرة تمرّ بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

نشاط ①



إذا كانت A,B,C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة (فهي تشكّل رؤوساً لمُثلّث)

أين تقع النّقط المتساوية البعد عن A , B ؟

أين تقع النّقط المتساوية البعد عن C , B ؟

إنّ محوري $[BC]$, $[AB]$ يتقاطعان بنقطة وحيدة {علّل} (نرمّزها O).

إنّ $OA = OB = OC$ {علّل}

وبالتّالي O هي مركز الدّائرة المارّة بالنّقط A,B,C ونصف قطرها $R = OA = OB = OC$

تعلّم

- من ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمرّ دائرة وحيدة مركزها نقطة تقاطع محاور القطع المستقيمة الواصلة بين هذه النّقط.
- من رؤوس مُثلّث تمرّ دائرة واحدة مركزها نقطة تلاقي محاور أضلاعه.

تفكير ناقد

ناقش صحّة العبارة الآتية مع التّعليل:

من ثلاث نقط على استقامة واحدة، يمكنُ أن تمرّ دائرة.

تطبيق

ABC مُثلّثٌ قائم الزّاوية في A ، وفيه $AC = 4, AB = 3$

- ارسم المُثلّث ABC ثُمَّ احسب BC.
- عيِّن مركز الدّائرة المارّة برؤوس المُثلّث ABC ثُمَّ احسب طولَ نصف قطرها.



الحل

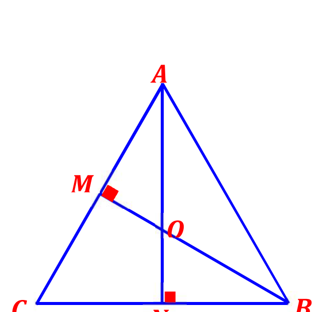
- حسب مُبرهنة فيثاغورث في المُثلّث القائم ABC نجد: $BC = 5$.
- إنّ مركز الدّائرة المارّة برؤوس المُثلّث القائم ABC هي النّقطة O منتصف الوتر $[BC]$ وطول نصف قطرها $OA = OB = OC = \frac{5}{2}$

حاول أن تحلّ

ABC مُثلّث متساوي الأضلاع، طول ضلعه 6

- ارسم هذا المُثلّث، وعيّن مركز الدّائرة المارّة برؤوسه.
- احسب طول أحد مُتوسّطاته واستنتج طول نصف قطر الدّائرة المارّة برؤوسه.

الحل

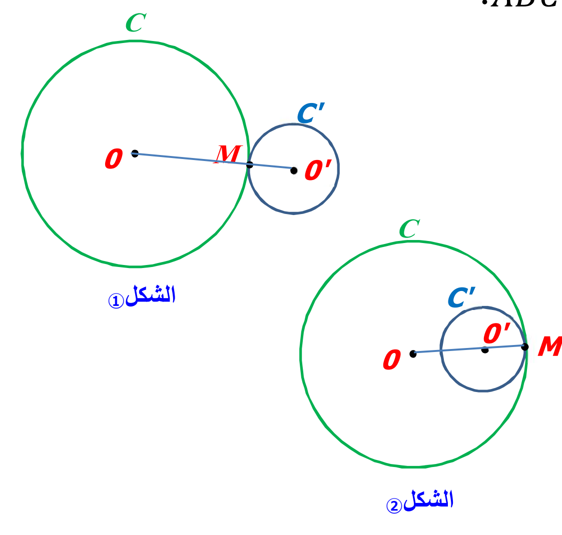


نرسم المثلث المتساوي الأضلاع ABC و نرسم محوري ضلعين فيه يتقاطعان في نقطه ولتكن (O) هي مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC ، $AN = \frac{\sqrt{3}}{2}a$
(طول الارتفاع في المثلث المتساوي الأضلاع) ،
$AO = \frac{2}{3}AN$ (لأنَّ كل ارتفاع في المثلث المتساوي الأضلاع هو متوسط)

ومنه $AO = \frac{2}{3}3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

وهو نصف قطر الدائرة المارَّة برؤوس المثلث المتساوي الأضلاع ABC.

رابعاً: الدّائرتان المتماسّتان



في كل من الشّكلين المجاورين

الدّائرتان $C(O,R)$، $C'(O',R')$ تشتركان في نقطة وحيدة M

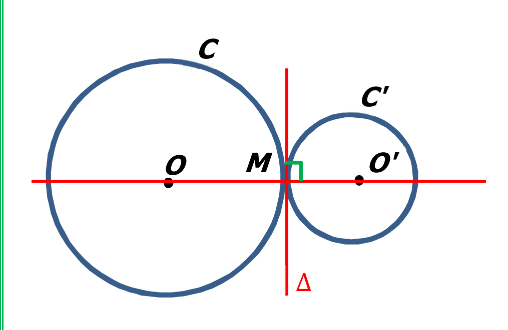
نُسمِّي هاتين الدّائرتين: دائرتين مُتماسّتين ونُسمِّي M نقطة تماسّ.

في الشّكل $_1$: C، C' مُتماسّتان خارجاً

في الشّكل $_2$: C، C' مُتماسّتان داخلاً

مبرهنة (تُقبَلُ من دون برهان)

مركزا الدّائرتين المتماسّتين ونقطة التماسّ تقع على استقامة واحدة



نتيجة:

في الشّكل المرسوم جانباً

العمود على المستقيم (OO') في نقطة التماسّ M مماسّ مشترك.

تطبيق

1. ارسمِ الدّائرتين $C(O,4)$ ، $C'(O',2)$ المتماسّتين خارجاً في M واحسب OO'.
2. كرِّرِ الطّلب السّابق عندما C, C' مُتماسّتان داخلاً.

الحل

1. الدائرتان متماستان خارجاً $OO' = R + R' = 4 + 2 = 6$
2. ا لدائرتان متماستان داخلاً $OO' = R - R' = 4 - 2 = 2$

حاول أن تحلّ

في الشّكل المجاور: أوجدْ طولَ $[GN]$ (قطعة من المماسّ المشترك لدائرتين).



$OO' = 4 + 9 = 13$ ،

ارسم $[ON], [O'G]$ وارسم$(O'F) \perp [ON]$ يلاقيه في F

الرباعي $GNFO'$ مستطيل ومنه$FN = O'G = 4$ ومنه $OF = 9 - 4 = 5$

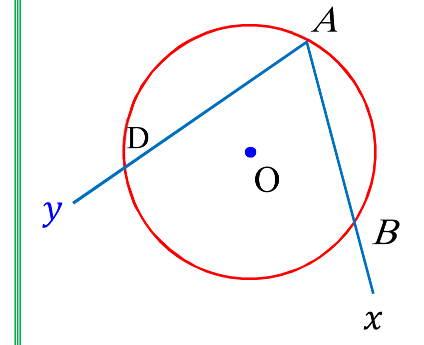
حسب فيثاغورث في المثلث $OO'F$ نجد $FO' = NG = 12$

3 - 3 الزّاوية المحيطيّة والزّاوية المماسيّة في دائرة

سوف تتعلّم

- الزّاوية المحيطيّة وعلاقتها بالقوس المقابلة لها.
- الزّاوية المماسيّة وعلاقتها بالقوس المقابلة لها.

أولاً: الزّاوية المحيطيّة في دائرة



تعريف:

في الشّكل المجاور: $A \in C$

$[Ax)$, $[Ay)$ نصفا مستقيمين يقطعان الدّائرة C في النّقطتين B, D على التّرتيب

قوس الدّائرة المحصور بين نصفي المستقيمين $[Ax)$, $[Ay)$

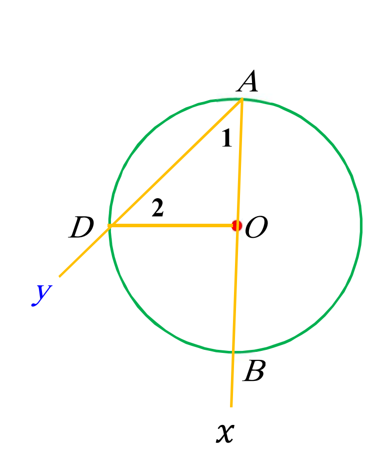
والذي لا تنتمي إليه النّقطة A هو $\overset{\frown}{BD}$.

نسمّي الزّاوية $x\hat{A}y$ زاوية مُحيطيّة

والقوس $\overset{\frown}{BD}$ القوس المُقابلة للزّاوية المُحيطيّة (أو قوس الزّاوية المُحيطيّة).



نشاط ①



في الشّكل المجاور:

دائرة مركزها O فيها: $D\hat{A}B$ زاوية مُحيطيّة

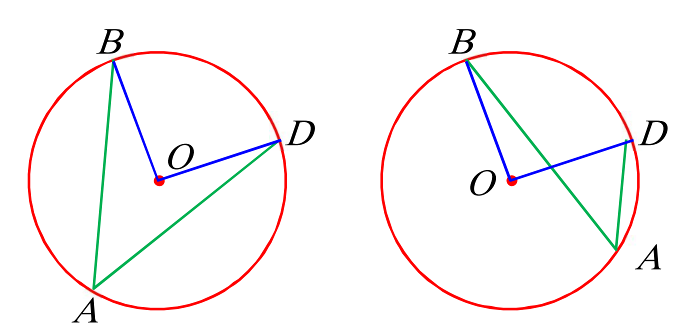
و $D\hat{O}B$ زاوية مركزية مشتركتان في القوس $\overset{\frown}{DB}$

1. ما نوع المُثلّث OAD ؟ {علّل}
2. ما العلاقة بين الزّوايا $B\hat{O}D$, $\hat{1}$, $\hat{2}$ ؟
3. بيّن أنّ $\hat{1} = \hat{2}$
4. بيّن أنّ $B\hat{O}D = 2B\hat{A}D$ ومنه $B\hat{A}D = \frac{1}{2}B\hat{O}D$.

تعلّم

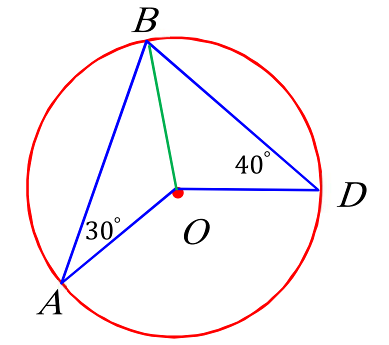
- قياسُ الزّاوية المُحيطيّة في دائرة يساوي نصفَ قياس الزّاوية المركزية المشتركة معها بذات القوس.
- قياسُ الزّاوية المُحيطيّة في دائرة يساوي نصفَ قياس القوس التي تحصره (نصف قياس القوس المقابلة لها).

ملاحظة



تمَّ برهان التّعلُّم السّابق عندما مرَّ أحد ضلعي الزّاوية المُحيطيّة بمركز الدّائرة واعتماداً عليها يمكنُ برهان التّعلم عندما لا يمرّ أيّ من ضلعي الزّاوية المُحيطيّة بمركز الدّائرة.

تطبيق



في الشّكل المجاور:

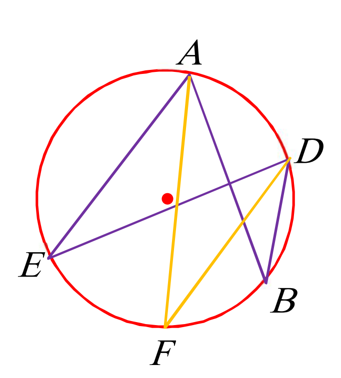
احسب $A\hat{O}D$.

الحل

$A\hat{B}D = 70^\circ$ ﴿علّل﴾

$A\hat{O}D = 140^\circ$ ﴿علّل﴾

نشاط ②



في الشّكل المجاور:

إنّ $D\hat{B}A = D\hat{F}A = D\hat{E}A$ ﴿علّل﴾

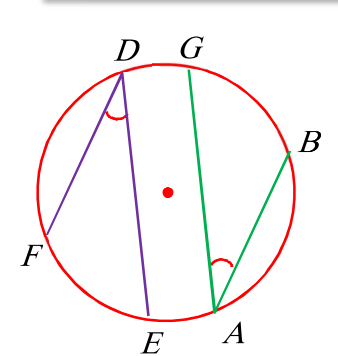


- الزّوايا المُحيطيّة التي تحصرُ القوسَ ذاتها في دائرة طبوقةٌ.



في الشّكل المجاور:

أثبت أنّ $B\hat{A}G = E\hat{D}F$ أثبت أنّ $\overset{\frown}{BG}$, $\overset{\frown}{FE}$ طبوقتان.



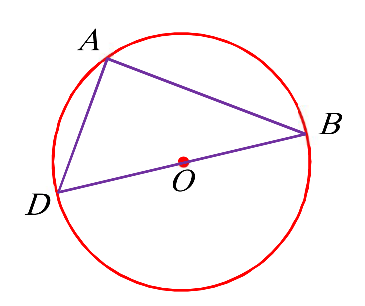
تعلّم

- الزّوايا المُحيطيّة الطّبوقة في دائرة تقابلُ أقواساً طبوقةً.

نشاط 4

في الشّكل المجاور:

بيّن أنّ $D\hat{A}B = 90^\circ$.





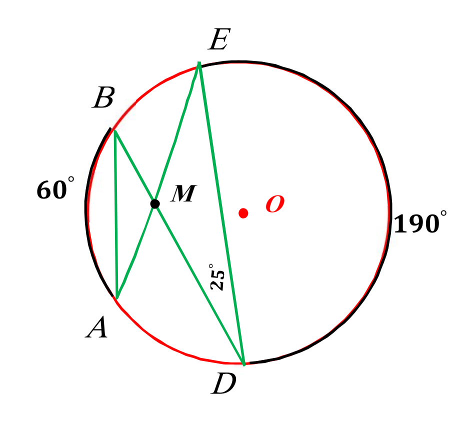
- الزّاوية المُحيطيّة التي تحصر قوسَ نصف الدائرة قائمةٌ.

تطبيق

في الدّائرة $C(O,R)$ المرسومة جانباً:

$B\hat{D}E = 25^\circ$ ، $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$ ، $\overset{\frown}{DE} = 190^\circ$

1. احسبْ قياسَ الزّاوية $B\hat{A}E$ وقياس القوس $\overset{\frown}{AD}$.
2. احسبْ قياسَ كلّ من الزّوايا $E\hat{M}D$, $D\hat{E}A$, $D\hat{B}A$.



الحل

1. $B\hat{A}E = 25^\circ$ {علّل}
   $\overset{\frown}{AD} = 60^\circ$ {علّل}
2. $D\hat{B}A = D\hat{E}A = 30^\circ$ {علّل}
   $E\hat{M}D = 125^\circ$ {علّل}

ثانياً: الزّاوية المماسّيّة في دائرة



تعريــــــــف

تأمّل الدّائرة $C(O,R)$ المرسومة جانباً حيث:

(xx') مماسٌّ للدائرة في A، $[AB]$ وترٌ فيها.

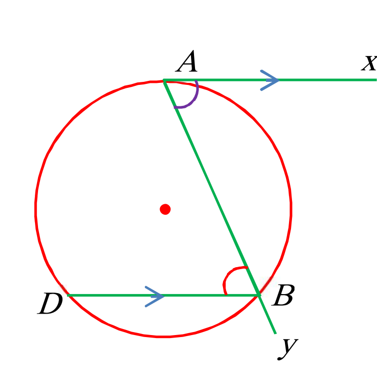
نسمِّي الزّاوية $x\hat{A}y$ زاوية مماسّيّة والقوس $\overset{\frown}{AB}$ القوس المُقابلة لهذه الزّاوية.

والزّاوية $x'\hat{A}y$ مماسّيّة و القوس $\overset{\frown}{AMB}$ القوس المُقابلة لهذه الزّاوية.



مُبرهنة

قياسُ الزّاوية المماسّيّة في دائرة يساوي نصفَ قياس القوس المُقابلة لها.



الفرض: $x\hat{A}y$ زاوية مماسّيّة في الدّائرة C

الطّلب: $x\hat{A}y = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

البرهان: نرسمُ الوترَ $[BD]$ بحيث $[BD] /\!/ [Ax)$

فتكونُ القوسانِ $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{AB}$ طبوقتين " محصورتان بين وتر ومماسّ يوازيه "

لكن $x\hat{A}y = A\hat{B}D$ " متبادلتان داخلاً ".

$A\hat{B}D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ " مُحيطيّة قوسها $\overset{\frown}{AD}$ "

ومنه $A\hat{B}D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

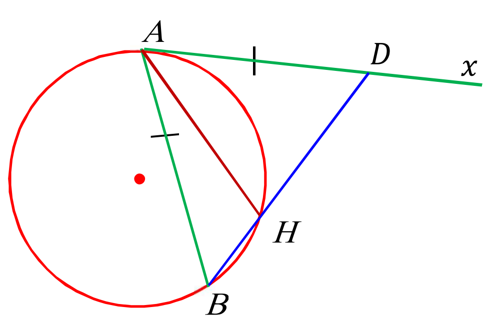
إذن $x\hat{A}y = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ وهو المطلوب.

تحقّق من فهمك

1. قياسُ الزّاوية المماسّيّة في دائرة يساوي قياسَ الزّاوية المُحيطيّة المشتركة معها في ذات القوس. ﴿علِّل﴾

2. قياسُ الزّاوية المماسّيّة في دائرة يساوي نصفَ قياس الزّاوية المركزية المشتركة معها في ذات القوس. ﴿علِّل﴾

تطبيق



$[AB]$ وتر في الدّائرة $C(O,R)$ وَ $[Ax)$ مماسّ للدائرة في النّقطة A
نعيّن على $[Ax)$ النّقطة D بحيث $AB=AD$ ونرسم $[DB]$ فيقطع الدّائرة
في النّقطة H، برهن أنّ المُثلّث AHD متساوي السّاقين.

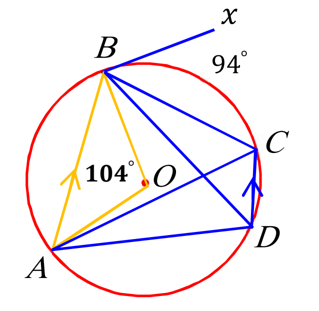
الحل

$\hat{B}=\hat{D}$ ﴿علل﴾
$\hat{B}=D\hat{A}H$ (محيطية ومماسية تحصران القوس ذاته)

ومنه $\hat{D}=D\hat{A}H$ فالمثلث DAH متساوي
الساقين لتساوي قياسي زاويتين فيه.

حاول أن تحلّ

1- في الشّكل المجاور:



قياسُ القوس $\overset{\frown}{BC}$ يساوي 94° ، $B\hat{O}A=104^\circ$
$[Bx)\perp[OB]$, $[AB]\mathbin{/\!/}[DC]$
والمطلوب حسابُ قياس كلٍّ من: $O\hat{A}C$, $D\hat{B}x$, $\overset{\frown}{ADC}$, $\overset{\frown}{AD}$, $B\hat{D}A$

2- $[AB]$ قطرٌ في الدّائرة $C(O,R)$، نرسم المماسَّ للدائرة في النّقطة A ونعيِّن عليه

النّقطةَ D بحيث $[BD]$ يقطع الدّائرة في C في النّقطة H، فإذا كانت النّقطة E منتصفَ $[AD]$.

برهن أنّ المُثلّث AHB قائمُ الزّاوية، وأنّ المُثلّث AEH متساوي السّاقين.

الحل

1- $B\hat{D}A=52^\circ$ (محيطية مشتركة مع المركزية $B\hat{O}A$ بذات القوس)

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}=94^\circ$ (قوسان محصورتان بين وترين متوازيين) ،

$\overset{\frown}{DC}=360^\circ-(2\times94^\circ+104^\circ=360^\circ-292^\circ=68^\circ)$

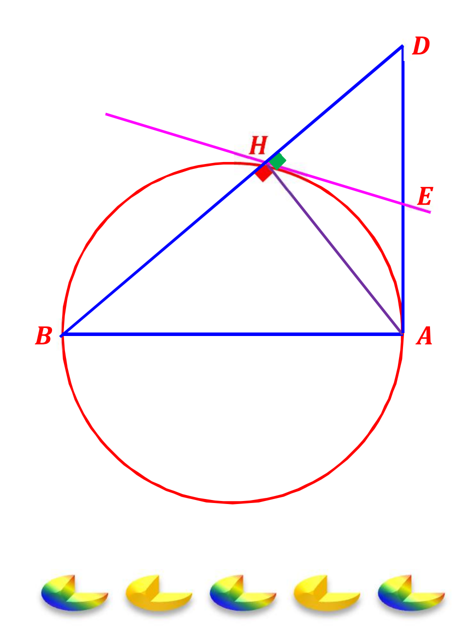
ومنه $\overset{\frown}{ADC}=94^\circ+68^\circ=162^\circ$ ، $D\hat{B}X=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DCB}=81^\circ$

من المثلث BOA نجد $O\hat{A}B=O\hat{B}A=38^\circ$ و $B\hat{A}C=47^\circ$ (محيطية تحصرا لقوس $\overset{\frown}{BC}$)

ومنه $O\hat{A}C=C\hat{A}B-O\hat{A}B=47^\circ-38^\circ=9^\circ$.

2- AHB مثلث قائم الزاوية في H لأنَّ $A\widehat{H}B$ محيطية تحصر قوس نصف الدائرة ومنه : $D\widehat{H}A = 90^{\circ}$ والمثلث DHA مثلث

قائم الزاوية في H $[HE]$ متوسط متعلق بالوتر ومنه $HE = AE$ والمثلث HEA متساوي الساقين.



4 - 3 الربـــــاعيّ الـــــدّائريّ

سوف تتعلّم

- الرُّباعيّ الدّائريّ وخصائصه.
- بعض الحالات التي يكون فيها الرُّباعيّ دائرياً.



صُنِّفت المُضلّعات إلى مُضلّعات منتظمة أو غير منتظمة وسنضيف تصنيفاً جديداً إليها.

أولاً: الرُّباعيّ الدّائري

تعرّفْتَ سابقاً مُضلّعاتٍ تمرُّ برؤوسها دائرةٌ مثل المُثلّث ، المستطيل ، المربّع ...
ومُضلّعات لا تمرُّ برؤوسها دائرةٌ مثل المُعيَّن ، متوازي الأضلاع ...

تذكّر

- إذا لم يُذكر نوع الرباعي فهو محدب.
- مجموع قياسات زوايا أي مضلع رباعي 360°.
- الزاوية الخارجية لمضلع تكون محصورة بين ضلع وامتداد ضلع آخرى.
- الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسيهما 180°.

تعلّم

- المُضلّع الدّائريّ هو مُضلّعٌ تمرُّ برؤوسه دائرة.

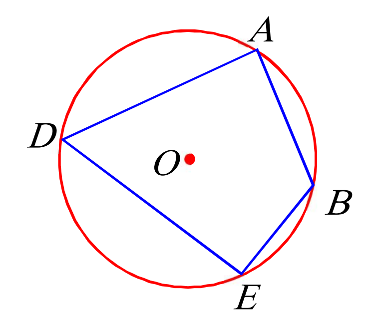
وستُقْتَصَرُ دراستُنا على الرُّباعيّ الدّائريّ.

مُبرهنة

في الرُّباعيّ الدّائريّ كلُّ زاويتين متقابلتين متكاملتان.

الفرض: $ABED$ رُباعيّ دائريّ.

الطّلب: الزّاويتان A,E متكاملتان والزّاويتان B,D متكاملتان.



البرهان:

① $\hat{A} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BED}$

② $\hat{E} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}$

الزّاويةُ المُحيطيّةُ تقاسُ بنصفِ قياس القوس المقابلة لها

بجمع ① وَ ② طرفاً إلى طرف نجد:

$$\hat{A} + \hat{E} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BED} + \overset{\frown}{BAD}\right)$$

أي $\hat{A} + \hat{E} = \frac{1}{2} \times 360^\circ$

ومنه $\hat{A} + \hat{E} = 180^\circ$

بالتّالي $\hat{A}, \hat{E}$ متكاملتان.

وبما أنّ مجموع قياسات زوايا أي رباعي 360°

فإنّ $\hat{D} + \hat{B} = 180^\circ$ بالتّالي $\hat{D}, \hat{B}$ متكاملتان.

تطبيق

في الشّكل المجاور:

$\hat{D} = 80^\circ$

أوجد قياس الزّاوية $A\hat{B}x$



الحل

بما أنّ $ABED$ رُباعيّ دائريّ

إذن: $\hat{D} + \hat{B} = 180^\circ$ ومنه $\hat{B} = 100^\circ$

أي: $A\hat{B}x = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

تعلّم

- قياسُ كلّ زاوية خارجيّة لرُباعيّ دائريّ يساوي قياس الزّاوية الدّاخليّة المقابلة لمجاورتها.

ثانياً: حالات يكون فيها الرُّباعيّ دائريّاً



مُبرهنة (تُقبَلُ من دون برهان)

إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رُباعياً كان هذا الرُباعيّ دائريّاً.

أي إذا كان: $ABED$ رُباعيّ فيه الزّاويتان A , E متكاملتان.

فإنّ: $ABED$ رُباعيّ دائريّ.

تطبيق

في الشّكل المجاور: إذا كان $A\hat{H}G = \hat{F}$، برهن أنّ $EFGH$ رُباعيّ دائريّ.

الحل

بما أنّ الزّاويتين H , AHG متكاملتان وَ $A\hat{H}G = \hat{F}$

فإنّ $\hat{F},\hat{H}$ متكاملتان، وبالتّالي الرُباعيّ $EFGH$ دائري "لوجود زاويتين متقابلتين فيه متكاملتين".



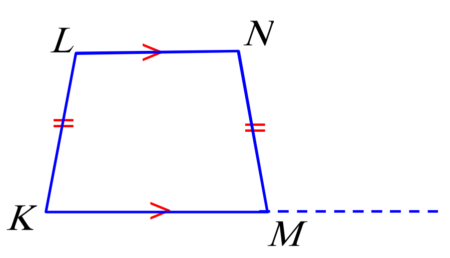
تعلّم

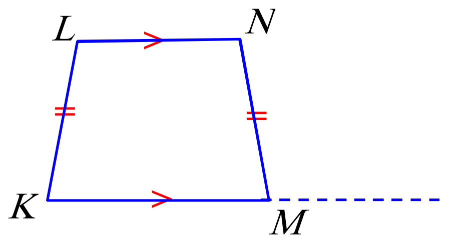
- إذا تساوى قياس زاوية خارجيّة لرُباعيّ مع قياس الزّاوية الدّاخليّة المقابلة لمجاورتها كان هذا الرُّباعيّ دائريّاً.

تطبيق

لنُثبِتَ أنّ أيّ شبه منحرف متساوي السّاقين هو رُباعيّ دائريّ.

في الشّكل المجاور:





$NMKL$ شبه منحرف متساوي السّاقين

هل $\hat{M}$, $\hat{N}$ متكاملتان ؟ {علّل}

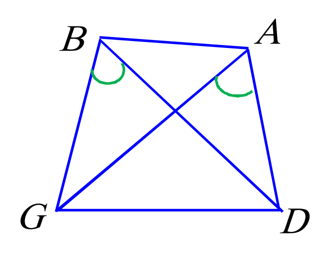
إنّ $\hat{M} = \hat{K}$ {علّل}

إذن $\hat{K}$, $\hat{N}$ متكاملتان فالرُباعيّ $NMKL$ دائريّ.

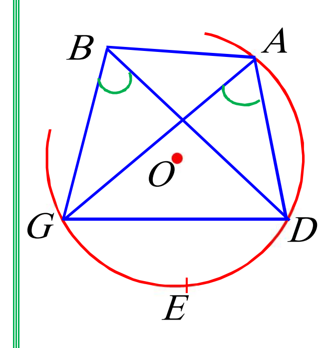
حالة ثالثة

مبرهنة

" إذا كانت A,B نقطتين تقعان في جهة واحدة نسبة إلى (GD)
وكان $D\hat{A}G = D\hat{B}G$
وقعت النّقط الأربع A,D,G,B على دائرة واحدة"



الفرض: $D\hat{A}G = D\hat{B}G$ و A,B نقطتان تقعان في جهة واحدة نسبة إلى (GD)
الطّلب: النّقط الأربع A,D,G,B على دائرة واحدة.
البرهان: النّقط A,D,G ليست على استقامة واحدة، فتمر بها دائرة وحيدة نرسمها ولتكن C
نأخذ النّقطة E من القوس $\overset{\frown}{GD}$ التي لا تحوي النّقطة A ،
وبالتّالي النّقط A,D,E,G تقع على الدّائرة C،



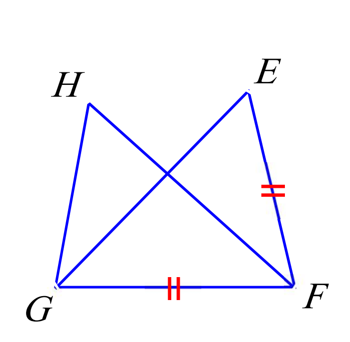
فالرُّباعيّ $ADEG$ دائريّ، وبالتّالي الزّاويتان $D\hat{A}G$, $D\hat{E}G$ متكاملتان،
ولكن $D\hat{A}G = D\hat{B}G$ فرضاً، إذن الزّاويتان $D\hat{B}G$, $D\hat{E}G$ متكاملتان أيضاً فالرُّباعيّ $BDEG$ دائري،
وبالتّالي تمرّ برؤوسه دائرة C' طبوقة على الدّائرة السابقة C ، لأنهما مشتركتان في النّقط D,E,G ،
فالنّقط A,D,G,B تقع على دائرةٍ واحدةٍ.

تطبيق

في الشّكل المرسوم جانباً:

$$FG = FE \;,\; \hat{H} = 50^\circ \;,\; E\hat{F}G = 80^\circ$$

برهن أنّ النّقط E,F,G,H تقعُ على دائرةٍ واحدةٍ.



الحل

بما أنّ EFG مُثلّث متساوي السّاقين،
إذن: $\hat{E} = \hat{G} = 50^\circ$ وبالتّالي $\hat{E} = \hat{H} = 50^\circ$
الزّاويتان $G\hat{H}F$, $G\hat{E}F$ لهما ذات القياس ورأساهما يقعان في جهة واحدة نسبة إلى (GF)
بالتّالي النّقط E,F,G,H تقع على دائرة واحدة.

حاول أن تحلّ

1. ABE ، DBE مُثلّثان قائمان وترهما المشترك $[BE]$

a) إذا كانت النّقطتان A,D تقعان في جهة واحدة نسبة إلى (BE)

برهن أنّ النّقط A,D,B,E تقع على دائرة واحدة، عيّن مركزها وارسمها.

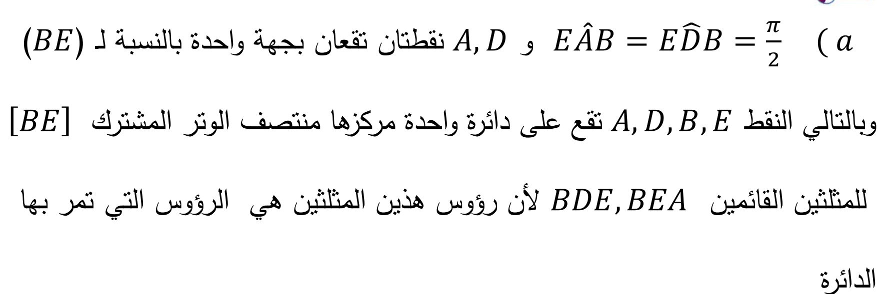
b) على نصف المستقيم $[ED)$ نحدد النّقطة H بحيث $DH = DB$

وعلى نصف المستقيم $[BA)$ نحدّد النّقطة T بحيث $TA = AE$

برهن أنّ النّقطة B,E,T,H تقع على دائرة واحدة.

c) أعد حلّ الطّلب الأوّل إذا كانت النّقطتان A,D في جهتين مختلفتين نسبة إلى (BE).

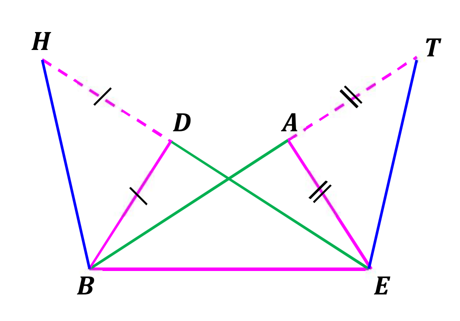
الحل



a) $E\hat{A}B = E\widehat{D}B = \frac{\pi}{2}$ و A,D نقطتان تقعان بجهة واحدة بالنسبة لـ (BE)

وبالتالي النقط A,D,B,E تقع على دائرة واحدة مركزها منتصف الوتر المشترك $[BE]$

للمثلثين القائمين BDE,BEA لأن رؤوس هذين المثلثين هي الرؤوس التي تمر بها الدائرة



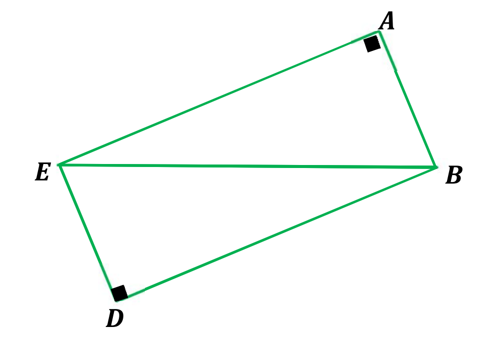
b) $T\hat{A}E = 90^\circ$ والمثلث TAE متساوي الساقين ومنه $E\hat{T}B = 45^\circ$

$\widehat{BDH} = 90^\circ$ والمثلث BDH متساوي الساقين ومنه $B\hat{H}E = 45^\circ$

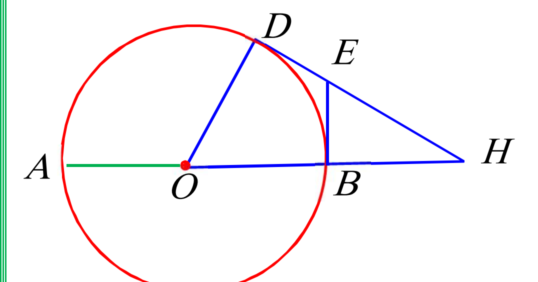
$E\hat{T}B = B\hat{H}E = 45^\circ$ و T,H نقطتان تقعان بجهة واحدة بالنسبة ل(BE)

وبالتالي النقط H,T,B,E تقع على دائرة واحدة

C) $\hat{A} + \widehat{D} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ والرباعي $ABDE$ دائر لوجود زاويتين متقابلتين متكاملتين فيه ومنه النقط A,B,D,E تقع على دائرة واحدة



2. في الشّكل المرسوم جانباً:



$C(0,6)$ دائرة (DH),(BE) مماسان لها

في النّقطتين B, D على الترتيب وَ $B\hat{O}D = 60^\circ$ والمطلوب:

a) احسب DH.

b) بيّن أنّ النّقط O,B,E,D تقع على دائرة واحدة ثُمَّ عيِّن مركزها وارسمها.

الحل

$H\widehat{D}O = 90^\circ$ ومنه $\widehat{H} = 30^\circ$ ، $OD = 6$ ومنه $OH = 12$

وحسب فيثاغورث في المثلث OHD نجد $DH = 6\sqrt{3}$ ،

$\widehat{B} + \widehat{D} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

فالرباعي $OBDE$ دائري لوجود زاويتين متقابلتين متكاملتين فيه،

ومنه النقط O, B, D, E تقع على دائرة واحدة

مركزها منتصف الوتر المشترك $[OE]$ للمثلثين القائمين ODE, BEO

لأن رؤوس هذين المثلثين هي الرؤوس التي تمر بها الدائرة



5 - 3 إنشاء مماسّ لدائرة

سوف تتعلّم

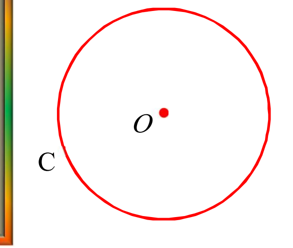
- إنشاء مماسّ لدائرة ماراً بنقطة تقع خارجها.
- إنشاء مماسّ لدائرة موازياً لمستقيم معلوم.

أولاً: إنشاء مماسّ لدائرة ماراً بنقطة تقع خارجها

تذكّر

عندما تمرّ دائرة برؤوس مُثلّث أحد أضلاعه قطر فيها يكونُ هذا المُثلّث قائم الزّاوية ووتره تلك الضّلع.

نشاط ①



لدينا الدّائرة $C(O,R)$ A

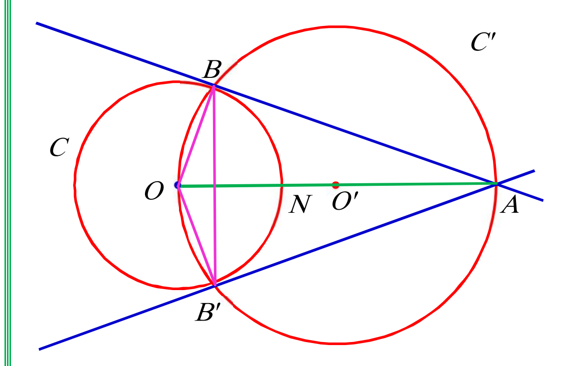
والنّقطة A تقع خارجها

ونريدُ إنشاءَ مماسّ لهذه الدّائرة ماراً بالنّقطة A.

الحل

يمكنُ ذلك بتنفيذ الخطوات الآتية:

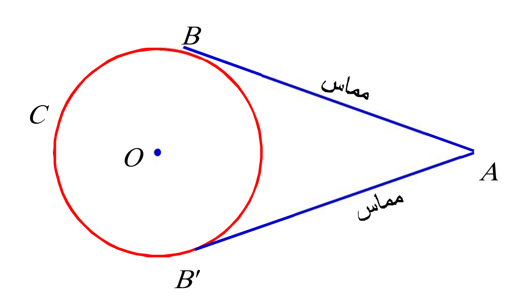
1. عيِّن النّقطة O' منتصف $[AO]$.
2. ارسم الدّائرة $C'(O',OO')$
   سمِّ B, B' نقطتا تقاطعها مع C.
3. برهن أنّ كلاً من (AB) , (AB') مماسّ للدائرة.



نشاط ②

في الشّكل المرسوم جانباً:

1. برهن أنّ $ABOB'$ رُباعيّ دائريّ.
2. برهن أنّ $AB = AB'$.
3. برهن أنّ (OA) محور $[BB']$.



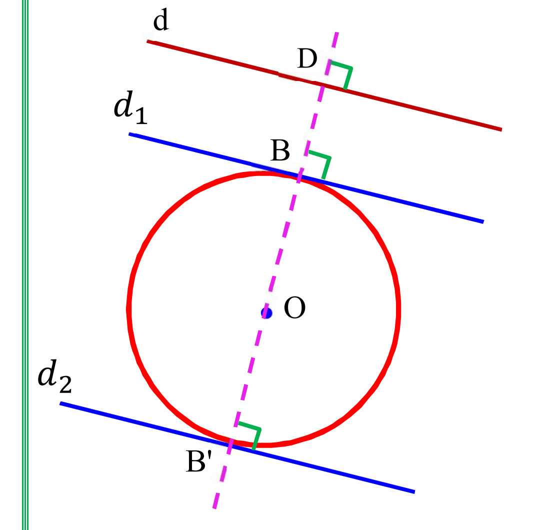
تعلّم

- من نقطة A خارج دائرة يمرّ مماسّان لهذه الدّائرة.
- جُزْءا المماسّين المحصورين بالنّقطة A ونقطتي التّماسّ B, B' طبوقان.
- المستقيمُ (OA) محور للوتر المشترك $[BB']$.
- الرُّباعيّ $ABOB'$ دائريّ.

تفكير ناقد

هل يمكنُ رسم مماسّ لدائرة مارّ بنقطة تقع داخلها ؟ ﴿علّل﴾

ثانياً: إنشاء مماسّ لدائرة موازٍ لمستقيم معلوم



لدينا الدّائرة $C(O,R)$ والمستقيم d

ونريدُ إنشاء مماسّ لهذه الدّائرة يوازي المستقيم d.

الحل

يمكن ذلك بتنفيذ الخطوات الآتية:

- ارسمِ المستقيمَ المارّ بـ O والعموديّ على المستقيم d وسمِّ نقطتي تقاطعه مع الدّائر B, B'.
- ارسمِ المستقيم d_1 العموديّ على $[OB]$ في B وارسم المستقيم d_2 العموديّ على $[OB']$ في B'.
- بيّن أنّ كلاً من d_1 و d_2 مماسّ للدائرة وأنّ المستقيمات d, d_1, d_2 متوازية.

تطبيق

تأمّل الشّكل المجاور: واحسب محيط المُثلّث ABC

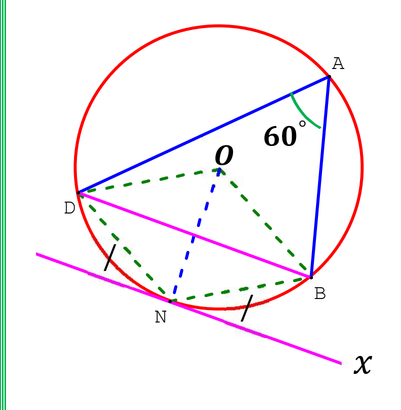
حيث $AN = x + 2 \; , AK = 4x - 1$

الحل

$AN = AK$ ومنه $x + 2 = 4x - 1$ أي $3x = 3$

ومنه $x = 1$ بالتالي $AN = AK = 3$ ويكون محيط المثلث $2(3 + 7 + 12) = 44$.

تمريناتُ الوحدة



1. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً:

حيث $C(O,R)$ دائرةٌ و $D\hat{A}B = 60^\circ$

النّقطةُ N منتصفُ القوس $\overset{\frown}{DNB}$

(Nx) مماسّ للدائرة في N والمطلوب:

- أوجد قياس الزّاوية $D\hat{O}N$ واستنتج أنّ الرباعي $OBND$ معين.
- استنتج أنّ $(DB) \mathbin{/\!/} (Nx)$

الحل:

- $ABND$ رباعي دائري ومنه $B\hat{N}D = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$B\hat{A}D = \frac{1}{2}B\hat{O}D$ (محيطه ومركزيه تشتركان بنفس القوس) ومنه $B\hat{O}D = 120^\circ$

بما أنّ N منتصف $\overset{\frown}{DNB}$ ومنه القوسان $\overset{\frown}{BN}$, $\overset{\frown}{DN}$ طبوقتان فيقابلهما زاويتان مركزيتان طبوقتان

ومنه $D\hat{O}N = B\hat{O}N = 60^\circ$

المثلث DON فيه $OD = ON = R$ فهو متساوي الساقين قياس زاوية الرأس فيه 60°

فهو متساوي الأضلاع وكذلك المثلث ONB

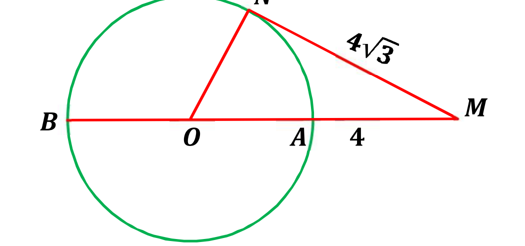
والرباعي $OBND$ معين لأنّ أضلاعه الأربعة طبوقة.

- $[ON] \perp [BD]$(قطرا المعين متعامدان)

$[ON] \perp (NX)$ (المماس عمودي على نصف القطر في نقطة التماس)

مما سبق نجد $(NX) \mathbin{/\!/} (BD)$ (لأنّ العمودان على مستقيم واحد متوازيان)

2. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً:



حيث (NM) مماسّ للدائرة في N

$AM = 4\,, NM = 4\sqrt{3}$ والمطلوب:

- احسبْ نصفَ قطر الدّائرة واستنتجْ قياسَ الزّاوية M.
- احسبْ قياسَ القوس $\overset{\frown}{NB}$ وقياسَ الزّاوية المُنعكسة $N\hat{O}B$.

الحل

- بما أنّ $(NM) \perp [ON]$

(المماس لدائرة في نقطة عمودي على نصف القطر في تلك النقطة)

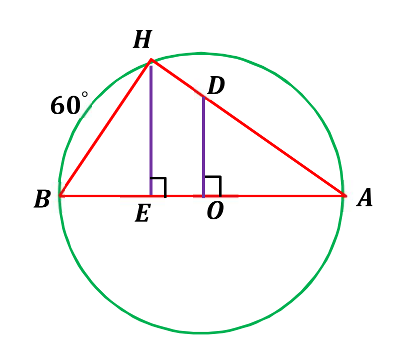
وإذا فرضنا نصف قطر الدائرة R

فإن $(R+4)^2 = R^2 + (4\sqrt{3})^2$

ومنه $R^2 + 8R + 16 = R^2 + 48$ إذن $8R=32$ ومنه $R=4$ و $OM=8$ ومنه $\widehat{M} = 30^\circ$

$N\widehat{O}M = 60^\circ$ من الطلب السابق ومنه $N\widehat{O}B = 120^\circ$ ، ومنه قياس القوس $\widehat{NB}$ يساوي 120°

قياس الزاوية المنعكسة $N\widehat{O}B$ هو : $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$



3. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً

$C(O,6)$ دائرة وَ $[HE] \perp [AB]$

$[DO] \perp [AB]$ وقياس القوس $\widehat{HB}$ يساوي 60° والمطلوب:

- احسبْ قياساتِ زوايا المُثلّث HAB وأطوال أضلاعه.
- احسبْ HE ثُمَّ AE.
- برهنْ أنّ المُثلّثين DOA , HEA متشابهان، ثُمَّ احسبْ OD.
- برهنْ أنّ الرُّباعيّ $ODHB$ دائريّ، ثُمَّ عيّن مركز الدّائرة المارّة برؤوسه واحسب طول نصف قطرها.

الحل

- $\hat{A}$ محيطية قوسها $\widehat{HB}$ ومنه $A = 30^\circ$ و $A\widehat{H}B = \frac{1}{2}(180^\circ) = 90^\circ$ ومنه $\hat{B} = 60^\circ$

$AB = 2R = 12$, ومنه $HB = 6$, $HA = 6\sqrt{3}$

من المثلث القائم HBE نجد : $sinB = \frac{HE}{HB} = \frac{HE}{6}$ ومنه: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{HE}{6}$ إذن $HE = 3\sqrt{3}$

وحسب فيثاغورث في المثلث HEA نجد: $HA^2 = HE^2 + EA^2$ ومنه

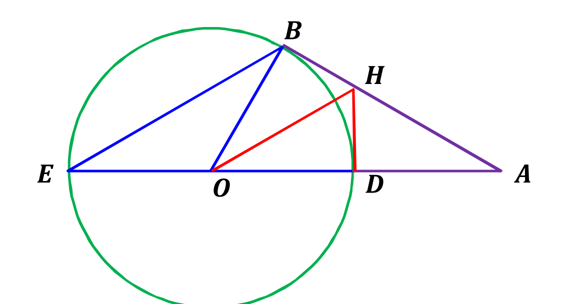
$108 = 27 + AE^2$ ومنه $AE^2 = 81$ ومنه $AE = 9$

- $(HE) \parallel (DO)$ (العمودان على مستقيم واحد متوازيان) ومنه المثلثان DOA , HEA متشابهان حسب النظرية الأساسية في التشابه ومن نسب التشابه نجد $\frac{OA}{EA} = \frac{OD}{HE}$ ومنه $\frac{6}{9} = \frac{OD}{3\sqrt{3}}$ ومنه $OD = 2\sqrt{3}$
- الرباعي $ODHB$ دائري لوجود زاويتين متقابلتين متكاملين فيه $B\widehat{H}D + D\widehat{O}B = 180^\circ$ مركز الدائرة المارة برؤوس الرباعي منتصف $[BD]$ لأنه وتر مشترك للمثلثين القائمين DOB , DHB ورؤوس هذين المثلثين هي رؤوس الرباعي وحسب فيثاغورث في المثلث DOB نجد: $DB^2 = DO^2 + OB^2$

$DB^2 = 12 + 36 = 48$

ومنه $DB = 4\sqrt{3}$ ونصف قطر الدائرة $2\sqrt{3}$

4. في الشّكل المجاور



$C(O,R)$ مماسّين للدائرة $(AB), (DH)$

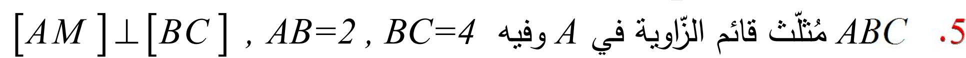
في B,D على التّرتيب

$D\hat{O}B = 60^\circ$ والمطلوب:

- أوجِدْ قياسَ الزّاوية A
- برهنْ أنّ D منتصف $[OA]$ وأنّ $HB = \frac{1}{2}HA$.
- برهنْ أنّ الرّباعيّ $OBHD$ دائريّ.
- احسبْ قياسَ الزّاوية E.

الحل :

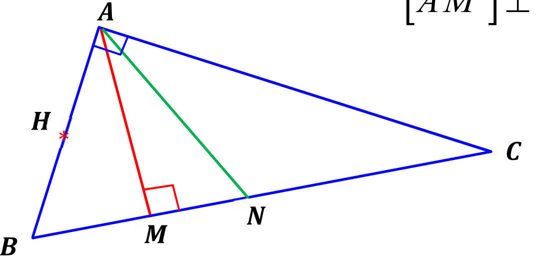
- OBA مثلث قائم في B لأنّ (BA) مماس للدائرة في B فهو عمودي على نصف القطر $[OB]$ ومنه $O\hat{B}A = 90^\circ$، وبما أنّ $B\hat{O}A = 60^\circ$ فرضاً فإنّ $A = 30^\circ$



- $[HD] \perp [OD]$ والمثلثان HDO, HBO قائمان وطبوقان ، ومن تطابقهما نجد $H\hat{O}D = H\hat{O}B = 30^\circ$ ، في المثلّث HAO نجد $H\hat{O}A = \hat{A} = 30^\circ$ فهو متساوي الساقين و $[HD]$ ارتفاع متعلق بالقاعدة فهو متوسط لها ومنه D منتصف $[OA]$، ومن تطابق المثلثين HDO, HBO نجد ① ..... $HD = HB$، وبما أنّ $A = 30^\circ$ في المثلّث القائم HAD فإن ② ..... $HD = \frac{1}{2}HA$ ، من ①و ② نجد $HB = \frac{1}{2}HA$
- الرباعي $OBHD$ دائري لأنّ $\hat{B} + \hat{D} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$(زاويتان متقابلتان متكاملتان فيه)
- $\hat{E} = \frac{1}{2}B\hat{O}D = 30^\circ$ (محيطيه ومركزيه تحصران القوس ذاته) .

5. ABC مُثلّث قائم الزّاوية في A وفيه $AB=2$, $BC=4$, $[AM] \perp [BC]$

N منتصف $[BC]$، H منتصف $[AB]$ والمطلوب:



- احسبْ AC ثُمَّ AN.
- احسبْ AM ثُمَّ MN.
- احسبْ $\tan A\hat{N}M$ ثُمَّ استنتج قياسها.
- برهنْ تشابه المُثلّثين ABC, NHB ثُمَّ احسبْ مساحةَ المُثلّث NHB.
- برهن أنّ النّقط A,H,M,N تقع على دائرة واحدة،

ثُمَّ عيّن مركزها واحسب طولَ نصف قطرها، وبرهنْ أنّ هذه الدّائرة تمرّ بمنتصف $[AC]$.

الحل :

- حسب فيثاغورث نجد $AC = 2\sqrt{3}$ ، $AN = \frac{1}{2}BC = 2$
- من المثلث القائم BMA نجد : $sinB = \frac{AM}{2}$ ومن المثلث القائم ABC نجد $sinB = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه
إذن $\frac{AM}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ إذن $AM = \sqrt{3}$ وحسب فيثاغورث في المثلث AMN نجد $MN = \sqrt{4-3} = 1$.
- من المثلث AMN نجد $tanA\widehat{N}M = \frac{AM}{MN} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ ومنه $A\widehat{N}M = 60^{\circ}$.
$[NH] \mathbin{/\!/} [AC]$ ومنه $NH = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}$ والمثلثان NHB,ABC متشابهان حسب المبرهنة الأساسية
في التشابه إذن $\frac{S(NHB)}{S(ABC)} = (\frac{NH}{AC})^2$ ومنه $\frac{S(NHB)}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$ وبالتالي $S(NHB) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $A\widehat{M}N = A\widehat{H}N = \frac{\pi}{2}$ والنقطتان H,M تقعان بجهة واحدة بالنسبة للمستقيم (AN) ، فالنقط A,H,M,N تقع على دائرة واحدة مركزها منتصف $[AN]$ وطول نصف قطرها: $\frac{1}{2}AN = 1$ ، وبفرض هذه الدائرة قطعت $[AC]$ في E أصبح لدينا المثلث AEN قائم الزاوية في E لأن ضلعه $[AN]$ قطر في الدائرة المارة برؤوسه وبالتالي : $[NE] \perp [AC]$ والمثلثان ENC,ENA طبوقان ومنه $EA = EC$ أي E منتصف $[AC]$



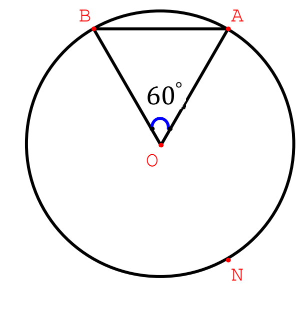
الوحـــــدة الثّالثـــــة

الـــــــــــــــــــــــــدّائرة

(الدّرس 1 – 3)



1. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً



- أوجد قياس القوس $\overset{\frown}{ANB}$
- ما نوع المُثلّث AOB ؟ {علل}



الحل

- قياس القوس $\overset{\frown}{ANB}$ هو $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$
- المُثلّث AOB متساوي الأضلاع لأنّه متساوي السّاقين وقياس إحدى زواياه 60°.



2. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً

- برهن أنّ القوسين $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{DE}$ طبوقتان ثُمَّ استنتج أنّ $AB = DE$.
- احسب قياس الزّاوية المركزيّة المُنعكسة $D\hat{O}E$.

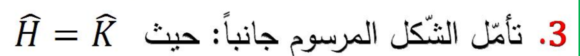


الحل

في المُثلّث المتساوي السّاقين ODE نجد: $\hat{D} = \hat{E} = 65^\circ$ ومنه $\hat{O} = 50^\circ$

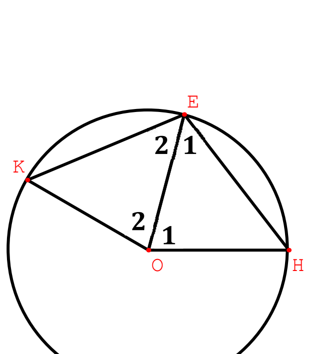
$B\hat{O}A = D\hat{O}E = 50^\circ$ ومنه $\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{DE}$ ومنه $AB = DE$ (إذا تطابقت قوسان)

$D\hat{O}E = 360^\circ - 50^\circ = 310^\circ$.



3. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً: حيث $\hat{H} = \hat{K}$

برهن أنّ $\overset{\frown}{EH} , \overset{\frown}{EK}$ طبوقتان ثُمَّ استنتج أنّ $EK = EH$.





الحل

$OH = OE = OK = R$

$\begin{cases} \hat{H} = \hat{E_1} \\ \hat{K} = \hat{E_2} \\ \hat{H} = \hat{K} \text{ لكن} \end{cases}$ إذن : $\hat{H} = \hat{E_1} = \hat{E_2} = \hat{K}$

ومنه : $\hat{O_1} = \hat{O_2}$

إذن قياس القوس $\overset{\frown}{HE}$ يساوي قياس القوس $\overset{\frown}{KE}$ ومنه $HE = KE$

(الدّرس 2 – 3)

1. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً

حيث $C(O,4)$ دائرة فيها $\widehat{AEB}=120^\circ, ON=NE$

- احسب قياس الزّاوية $A\hat{O}E$ ثُمَّ استنتج نوع المُثلّث AOE
- برهن أنّ الرُّباعي $OAEB$ مُعيّن ثُمَّ أوجد قياس القوس $\widehat{AD}$.
- احسب AB.



الحل

قياس AE يساوي 60° (قطر الدّائرة العمودي على وتر قوس فيها ينصف ذلك القوس)

ومنه $A\hat{O}E=60^\circ$ بالتّالي المُثلّث AOE متساوي الأضلاع (قياس زاوية رأسه 60°)

قطر الدّائرة العمودي على وتر فيها ينصف ذلك الوتر فالرُّباعي $OBEA$ معين (لأنّ قطراه متعامدان ومتناصفان).

$\widehat{AD}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

من المُثلّث القائم OAN نجد: $AN=2\sqrt{3}$ ومنه $AB=4\sqrt{3}$.



2. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً

حيث $C(O,5)$ دائرة فيها:

$A\hat{O}B=140^\circ, (x'x) /\!/ [AB], AB=8$

- احسب قياس القوس $\widehat{KA}$.
- احسب OH .

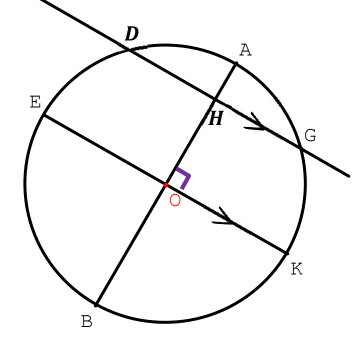
الحل

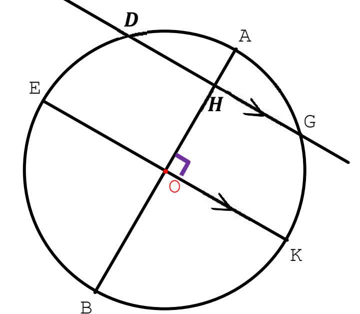
- قياس $\widehat{AKB}$ يساوي 140°، ومنه قياس KA يساوي 70°، (القوسان المحصورتان بين وتر ومماسّ يوازيه طبوقتان)
- $[OH]\perp[AB]$ (العمود على أحد مستقيمين متوازيين عمودي على الآخر).

ومنه $HA=HB=4$ (العمودُ المارّ من مركز دائرة على وترٍ فيها ينصفه)

وحسب فيثاغورث في المُثلّث OAH نجد $OH=3$.

3. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً حيث $C(O,4)$ دائرة

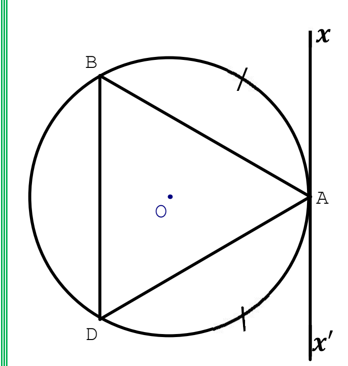




- احسب قياس القوس $\widehat{AB}$ ، ثُمَّ احسب طوله بدلالة π
- إذا كان قياس القوس $\widehat{GK}$ يساوي 50°، فاحسب قياس القوس $\widehat{GAD}$.
- برهن أنّ $HG=HD$.

الحل

- قياس القوس $\overset{\frown}{AB}$ يساوي 180° (قوس نصف الدائرة) وطوله $\frac{1}{2}(8\pi)=4\pi$
- الزّاوية المركزية $K\hat{O}A$ تقابل القوس $\overset{\frown}{AK}$ وبالتّالي قياسه 90° وبالتّالي $AG = 90^{\circ} - 50^{\circ} = 40^{\circ}$
- $[AB]$ عمودي على الوتر $[GD]$ لأنّه عمودي على موازيه $[EK]$ وبالتّالي $[AB]$ ينصف القوس DAG وبالتّالي قياسه يساوي 80°
- $HG = HD$ (العمود المارّ من مركز الدائرة على وتر فيها ينصّف هذا الوتر).



(الدّرس 3 – 3)

1. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً

حيث القوسان $\overset{\frown}{AD}, \overset{\frown}{AB}$ طبوقتان و $(x'x)$ مماس للدائرة في A

برهن أنّ: $(x'x) /\!\!/ [DB]$

الحل

$A\hat{D}B, x'\hat{A}D$ (مماسية ومحيطية تحصران قوسين طبوقتين)

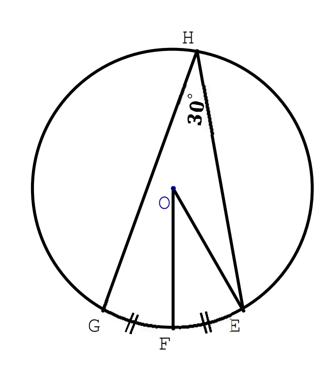
فهما طبوقتين وهما في وضع التّبادل الدّاخلي ومنه $(x'x) /\!\!/ [DB]$.



2. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً

حيث القوسان $\overset{\frown}{FG}, \overset{\frown}{EF}$ طبوقتان و $E\hat{H}G = 30^{\circ}$

- احسب قياس الزّاوية: $E\hat{O}F$.





الحل

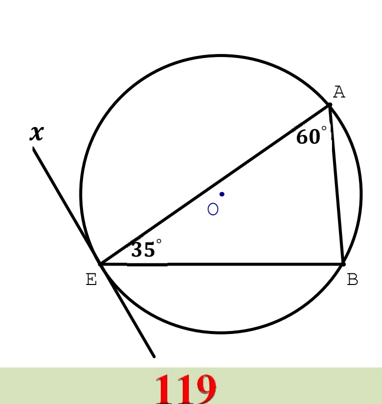
$E\hat{H}G = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EFG}$ ومنه $\frac{1}{2}\overset{\frown}{EFG} = 30^{\circ}$ إذن $\overset{\frown}{EFG} = 60^{\circ}$

وبالتّالي $\overset{\frown}{FE} = 30^{\circ}$ ومنه $\overset{\frown}{EOF} = 30^{\circ}$

3. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً

حيث $\hat{A} = 60^{\circ}, A\hat{E}B = 35^{\circ}, [Ex)$ مماسّ للدائرة في E

- احسب قياس الزّاوية: $A\hat{E}x$.
- احسب قياس الزّاوية: $O\hat{B}E$.



الحل

$\hat{B} = 180^{\circ} - (60^{\circ} + 35^{\circ}) = 85^{\circ}$

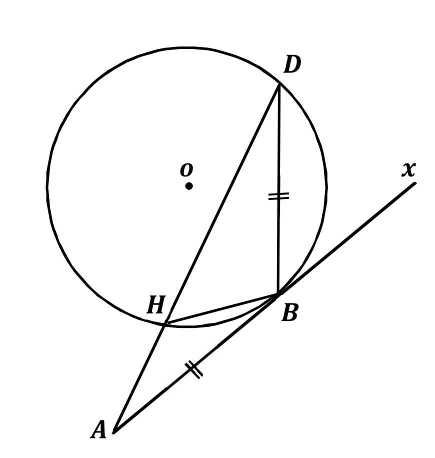
$A\hat{E}x = \hat{B} = 85^{\circ}$ (محيطية ومماسية تحصران القوس $\overset{\frown}{AE}$ ذاته).

$B\hat{O}E = 2\hat{A} = 120^{\circ}$ (مركزيّة ومحيطية تشتركان بالقوس ذاته).

$O\hat{E}B + O\hat{B}E = 60^{\circ}$ ومنه $O\hat{B}E = 30^{\circ}$ (BOE مُثلّث متساوي السّاقين).



4. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً



حيث (xA) مماس للدائرة في B و $BD = BA$

برهن أن المُثلّث HBA متساوي السّاقين.



الحل

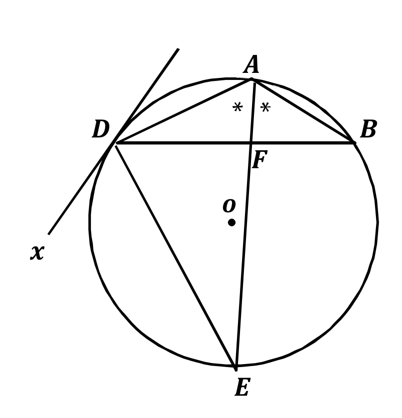
في المُثلّث DBA المتساوي الساقين $\hat{D} = \hat{A}$ زاويتا القاعدة.

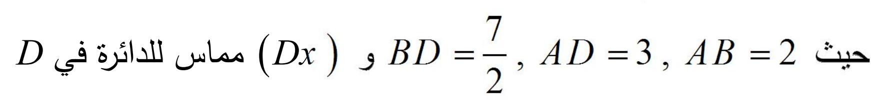
$\hat{D} = H\hat{B}A$ (محيطية ومماسية تحصران القوس $\overset{\frown}{HB}$ ذاته).

ومنه $\hat{A} = H\hat{B}A$ فالمُثلّث HBA متساوي السّاقين رأسُه H.



5. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً





حيث $AB = 2$, $AD = 3$, $BD = \frac{7}{2}$ و (Dx) مماس للدائرة في D

$[AE)$ منصف داخلي للزاوية $B\hat{A}D$

احسب FB.

برهن أن: $[DE)$ منصف داخلي للزاوية $B\hat{D}x$.



الحل

بما أنّ $[AE)$ منصف داخلي للزاوية $B\hat{A}D$ بالتالي:

$\frac{AB}{AD} = \frac{FB}{FD}$ أي $\frac{2}{5} = \frac{FB}{\frac{7}{2}}$ ومنه $FB = \frac{7}{5}$

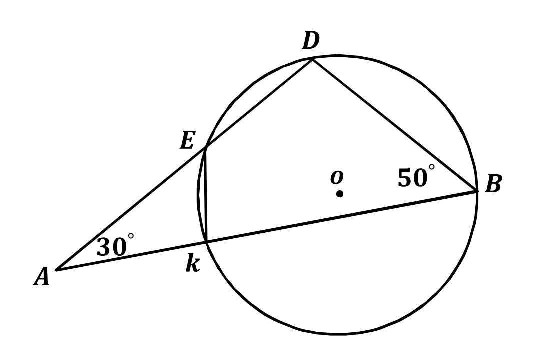
$B\hat{D}E = B\hat{A}E$ (محيطيتان تحصران القوس ذاته)

$E\hat{D}x = E\hat{A}D$ (محيطية ومماسية تحصران القوس ذاته)

لكن $B\hat{A}E = E\hat{A}D$ (لأن $[AE)$ منصّف للزاوية $B\hat{A}D$)

ومنه $B\hat{D}E = E\hat{D}x$ إذن $[DE)$ منصّف داخليّ للزّاوية $B\hat{D}x$

(الدّرس 4 – 3)



.1 تأمّل الشّكل المرسوم جانباً حيث $\hat{B} = 50^\circ$

- احسب قياس الزّاوية: $K\hat{E}D$.
- احسب قياس الزّاوية: $E\hat{K}B$.

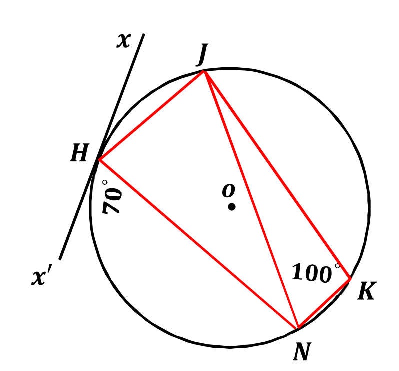
الحل

- $K\hat{E}D = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ (لأنّ **KEDB** رباعيّ دائري).
- $A\hat{E}K = 50^\circ$ (زاوية خارجية للرباعيّ دائري **KEDB**).

$E\hat{K}A = 180^\circ - (30^\circ + 50^\circ) = 100^\circ$ ومنه $E\hat{K}B = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$



.2 تأمّل الشّكل المرسوم جانباً



حيث $(x'x)$ مماس للدائرة في H و $N\hat{H}x' = 70^\circ$, $J\hat{K}N = 100^\circ$

- احسب قياس كلّ من الزّوايا الآتية: $J\hat{N}H$, $J\hat{H}x$, $H\hat{J}N$
- احسب قياس القوس $\overset{\frown}{JHN}$

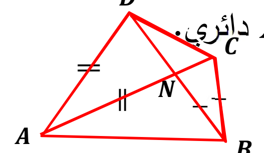
الحل

- $H\hat{J}N = N\hat{H}x' = 70^\circ$ (محيطية ومماسية تحصران القوس ذاته)

بما أنّ $JKNH$ رباعي دائري ومنه $J\hat{H}N = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ ومنه $J\hat{H}x = 180^\circ - (70^\circ + 80^\circ) = 30^\circ$

$J\hat{N}H = J\hat{H}x = 30^\circ$ (محيطية ومماسية تحصران القوس ذاته)، قياس القوس $\overset{\frown}{JHN}$ يساوي

$2 \times (30^\circ + 70^\circ) = 200^\circ$

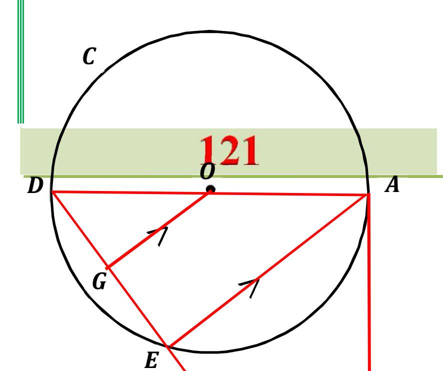


.3 تأمّل الشّكل المرسوم جانباً: حيث $BN = BC$, $AN = AD$، برهن أنّ الرُّباعي $ABCD$ دائري.

الحل

- $B\hat{C}N = B\hat{N}C$ (زاويتا القاعدة في مثلث متساوي الساقين).
- $A\hat{N}D = A\hat{D}N$ (زاويتا القاعدة في مثلث متساوي الساقين).
- $B\hat{N}C = A\hat{N}D$ (زاويتان متقابلتان بالرأس).

إذن $B\hat{C}A = B\hat{D}A$ والنقطتان D, C تقعان بجهة واحدة نسبة إلى المستقيم (AB) ، ومنه: النقط A, B, C, D تقع على دائرة واحدة فالرّباعي $ABCD$ دائريّ.



.4 تأمّل الشّكل المرسوم جانباً: حيث $C(O, R)$ دائرة

$AB = 4\ ,\ BD = 5$ و (AB) مماس للدائرة في النقطة A،

و $[AE] \mathbin{/\!/} [OG]$

- احسب طول نصف قطر الدّائرة C.
- برهن تشابه المُثلّثين $OGD\ ,\ AED$.
- احسب $[AE]\ ,\ [ED]$.
- احسب مساحة المُثلّث OGD.
- برهن أنّ الرُّباعي $OABG$ دائري، ثُمَّ عيّن مركز الدّائرة المارّة برؤوسه.

الحل

- المُثلّث BAD قائم الزاوية في A (المماس عمودي على نصف القطر في نقطة التماس).

وحسب فيثاغورث نجد: $AD = 3$ بالتالي نصف قطر الدائرة $R = 1.5$.

- المُثلّثان $OGD\ ,\ AED$ متشابهان (حسب النظرية الأساسية في التشابه).

$[AE]$ ارتفاع متعلّق بالوتر $[BD]$ لأنّ $A\hat{E}D = 90^\circ$ (محيطيّة تحصر قوس نصف الدّائرة).

من المُثلّث AEB القائم في E نجد: $\sin B = \frac{AE}{4} \cdots ①$

من المُثلّث ADB القائم في A نجد: $\sin B = \frac{3}{5} \cdots ②$

من ① و ② نجد: $\frac{3}{5} = \frac{AE}{4}$ ومنه $AE = \frac{12}{5}$

حسب فيثاغورث في المُثلّث AED القائم E نجد: $ED = \sqrt{9 - \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{225-144}{25}} = \frac{9}{5}$

- مساحة المُثلّث AED: $S_{\left(A\hat{E}D\right)} = \frac{1}{2} \times AE \times ED = \frac{1}{2} \times \frac{12}{5} \times \frac{9}{5} = \frac{54}{25}$

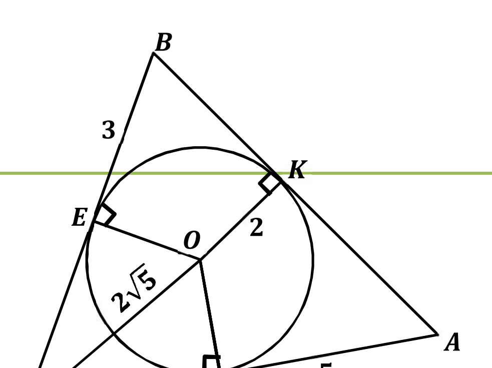
$\frac{S_{\left(o\hat{G}D\right)}}{S_{\left(D\hat{A}E\right)}} = \left(\frac{Do}{DA}\right)^2$ إذن: $\frac{S_{\left(o\hat{G}D\right)}}{\frac{54}{25}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ومنه $S_{\left(o\hat{G}D\right)} = \frac{54}{100} = \frac{27}{50}$

- $O\hat{G}B = A\hat{E}B = 90^\circ$ (بالتناظر)

وبالتالي الرباعي $OABG$ دائري ($\hat{A} + O\hat{G}B = 180^\circ$ زاويتين متقابلتين متكاملتين فيه)

ومركز الدّائرة المارّة برؤوسه هي منتصف القطر $[BO]$ لأنّ $[BO]$ وتر مشترك للمُثلّثين القائمين $BOG\ ,$ ABO ورؤوس هذين المثلين هي رؤوس الرباعي الدائري $OABG$.

(الدّرس 5 – 3)



1. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً

- احسب كلاً من AB , BO ثمَّ احسب محيط المُثلّث ABD.

الحل

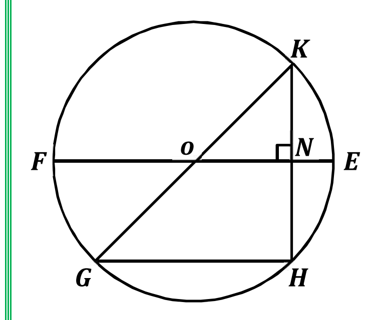
- $AK = AH = 5$, $Bk = BE = 3$ ومنه $AB = 5 + 3 = 8$.

حسب فيثاغورث نجد: $Bo = \sqrt{13}$

- من المُثلّث القائم DoH نجد: $DH = 4$ ، محيط المُثلّث DAB هو: $2(4 + 5 + 3) = 24$



2. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً حيث $C(O,5)$ دائرة و $GH = 6$



- برهن أنّ المُثلّثين GHK, ONK متشابهان، ثُمَّ احسب ON بطريقتين.



- برهن تطابق القوسين $\overset{\frown}{EH}$, $\overset{\frown}{FG}$

الحل

- $K\hat{H}G = 90^\circ$ محيطية تحصر قوس نصف الدائرة ، $(ON) /\!/ (GH)$ لأنهما عموديان على $[KH]$

المُثلّثان KHG, KON متشابهان حسب النظرية الأساسية في تشابه المُثلّثات.

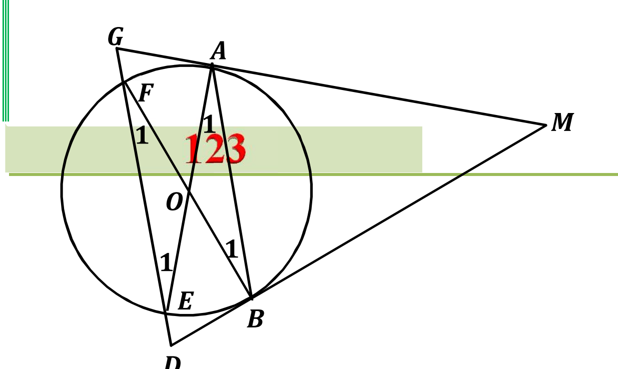
حساب $[ON]$ **طريقة①**: من تشابه المُثلّثين KHG, KON نجد:

$$\begin{pmatrix} KNO \\ KHG \end{pmatrix} \frac{KO}{KG} = \frac{NO}{HG}$$ ومنه $\frac{1}{2} = \frac{NO}{6}$ بالتالي $NO = 3$.

طريقة②: في المُثلّث KHG : (ON) مستقيم مار من منتصف ضلع في مُثلّث موازياً الضلع الثانية فهو يمر من متصف الضلع الثالثة إذن النقطة N منتصف $[KH]$ و $[ON]$ قطعة مستقيمة تصل بين منتصفي ضلعين في مُثلّث إذن: $ON = \frac{1}{2}GH = 3$

- القوسان : $\overset{\frown}{EH}$, $\overset{\frown}{FG}$ محصورتان بين الوترين المتوازيين $[GH],[FE]$: فهما طبوقتان

3. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً



حيث $(MD),(MG)$ مماسّين للدائرة $C(O,R)$

☜ برهن أنّ $[GD] \mathbin{/\!/} [AB]$.

☜ برهن أنّ: $MG = MD$.

الحل

☜ $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ زاويتا قاعدة في مُثلّث متساوي السّاقين
$\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$ زاويتا قاعدة في مُثلّث متساوي السّاقين
$\widehat{B_1} = \widehat{E_1}$ زاويتا محيطيتان تحصران القوس ذاته

ومنه $\widehat{B_1} = \widehat{F_1}$ وهما في وضع التّبادل الدّاخلي
ومنه $[GD] \mathbin{/\!/} [AB]$

☜ لدينا حسب تالس في المُثلّث MDG: $\frac{AG}{BD} = \frac{MA}{MB}$

لكن $\frac{MA}{MB} = 1$ لأنّ $MA = MB$ ومنه $\frac{AG}{BD} = 1$

أي أنّ $AG = BD$ ومنه $MB + BD = MA + AG$

وبالتّالي $MD = MG$.



اختبار الوحدة الثّالثة (الهندسة)

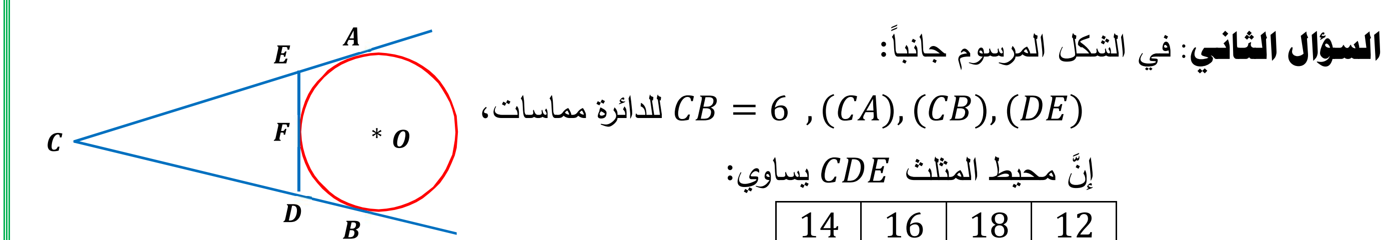
أولاً : صنّافة الاختبار:

الفهم	السؤال	الإجراء	السؤال
يعرف خاصة المماسين المارين من نقطة تقع خارج دائرة	2	يبرهن صحة المبرهنة في السؤال الأول	$(1)(a)$
		يبرهن أنَّ قطر الدائرة العمودي على وتر قوس فيها ينصف تلك القوس	$(1)(b)$
		تطبيق الحالة الثالثة لإثبات أنَّ الرباعي دائري	3
		برهان تشابه مثلثين اعتماداً على التعريف	$(4)(c)$
		ربط قياس الزاوية المحيطية بقياس قوسها وقياس الزاوية المركزية بقياس قوسها	$(4)(b)$
		تطبيق خاصية المماس لدائرة في نقطة تقع عليها	$(4)(a)$
		حساب طول الارتفاع المتعلق بالوتر في مثلث قائم وحساب طولي جزئي الوتر اعتماداً على النسب المثلثية لزاوية حادة	$(4)(a)$

ثانياً: الاختبار:

السؤال الأول: أجب عن أحد السؤالين الآتيين:

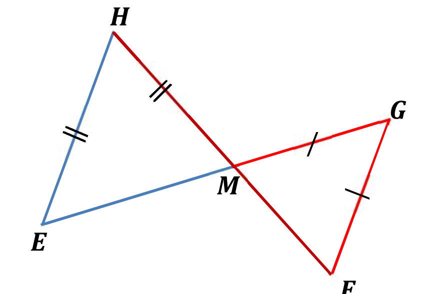
1. برهن صحة المبرهنة: إذا كانت $N \in C(O,R)$ ،
فإنَّ المستقيم العمودي على (ON) في النقطة N مماس للدائرة.
2. برهن أنّ قطر الدائرة العمودي على وتر قوس فيها ينصف تلك القوس.



السؤال الثاني: في الشكل المرسوم جانباً:
$(CA), (CB), (DE)$ ، $CB = 6$ للدائرة مماسات،
إنَّ محيط المثلث CDE يساوي:

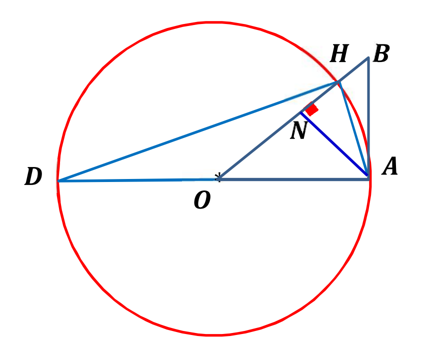
14	16	18	12

السؤال الثالث: تأمّل الشكل المرسوم جانباً:




ثُمَّ برهن أنَّ $HGFE$ رباعي دائري


السؤال الرابع: في الشكل المجاور $C(0,3)$ دائرة،



(AB) مماس لها في A، $AB = \sqrt{3}$ والمطلوب


1. احسب OB, AN, ON.


2. احسب قياس كلاً من $\hat{D}, \overset{\frown}{AH}, A\hat{O}B$.

3. اعتماداً على تعريف المثلثين المتشابهين برهن تشابه المثلثين ABO, ANO واستنتج نسبة التشابه.

انتهت الأسئلة

التّحـــــــــــــــاكي

مُنظِّم الدّرس (4 – 1)

أهداف الدّرس

يتعرف التحاكي

مُفردات جديدة

التقايس – التحاكي

مُستلزمات الدّرس

أدوات هندسية – كتاب الطالب – كتاب الأنشطة والتدريبات.

ســــــــيـر الـــــــــدّرس

التّمهيـــــــد

ما التحويلات الهندسية التي درستها سابقاً؟

هل تُحافظ هذه التحويلات على الأطوال ؟ (نُسمِّي التحويل الذي يُحافظ على الأطوال تقايساً)

ما العلاقة بين الشكل وصورته وفق هذه التحويلات ؟

سنتعرّف على تحويل هندسي جديد لا يَحافظ على الأطوال.

التّـــــدريس

- يوضِّح المدرس الشكل الوارد في النشاط ويُكلّف المجموعات حساب كلّ من النّسب: $\frac{OC'}{OC}$, $\frac{OB'}{OB}$, $\frac{OA'}{OA}$
- يُعبِّر المدرس عن: $\frac{OA'}{OA} = 3$، بالقول إنّ A' صورة A وفق التحاكي الذي مركزه O ونسبته 3.

ثُمّ يُكلِّف المجموعات ملء الفراغات.

- يطلُب المدرس برهان أنّ $3 = \frac{C'B'}{CB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$ ، وذلك بإثبات أنّ:

$$OA' = 3OA \,, OB' = 3OB \,, OC' = 3OC$$

$(A'B') /\!/ (AB)$ وأنّ $(B'C') /\!/ (BC)$ وكذلك $(C'A') /\!/ (CA)$

وأنّ المثلث $A'B'C'$ تكبير للمثلث ABC بالنسبة 3.

يُكلِّف المدرس كلّ طالب إملاء الفراغات الموجودة في الفقرة (2).

- اطرح على السبورة السؤال الآتي:

O نقطة معلومة، M نقطة بحيث $OM = 12\ cm$، ارسم على $[OM)$ نقطة M' بحيث $3 = \frac{OM'}{OM}$.

ثُمّ كلِّف أحد الطّلاب بحله.

يُعبِّر المدرس عن ذلك أنّ M' صورة M بالتّحاكي الذي مركزه O ونسبته 3.

- توصل مع الطلاب إلى تعريف التحاكي. وكيف نرسم صورة نقطة وفق تحاكٍ معلوم.

اطلب من المجموعات حلّ التطبيق (1)، (2) صفحة 72.

الخاتمـــة والتّقيـــيم

تحقق من فهمك:

1) إذا كان العدد الحقيقي $k = 1$، ما وضع النّقطتين M, M' ماذا نُسمّي هذا التّحويل؟

2) إذا كان العدد الحقيقي $k > 1$، ما وضع النّقطتين M, M' بالنّسبة إلى O؟

3) إذا كان $0 < k < 1$ ما وضع النّقطتين M, M' بالنّسبة إلى O ؟

4) إذا كان $k \neq 1$ هل التحاكي الذي نسبته k يُحافظ على الأطوال (تقايس) ؟ وهل ينطبق الشّكل على صورته؟

تمـــــــــرّن

اختيار تمارين مناسبة من كتاب الطّالب وكتاب الأنشطة والتّدريبات ليقوم الطُّلاب بحلها وظيفة منزلية.



الوحـــــــدة الرّابعـــــــة

التّحــــــــويلات الهندســـــــيّة

محتوى الوحدة

- التّحاكي.
- الانسحاب في مستوي الإحداثيّات.
- مركّب انعكاسين.

التّحويلاتُ الهندسيّةُ تطبيقاتٌ عمليّةٌ مفيدةٌ

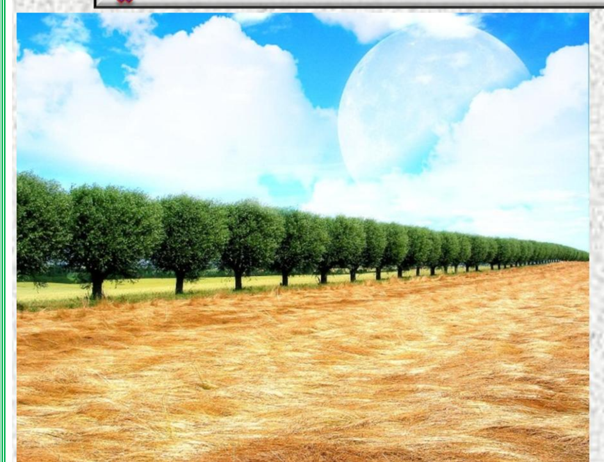
تُساعدُ على تذوّقِ جمالِ الأشكالِ الهندسيّة

بما فيها من دورانٍ وانعكاسٍ وانسحابٍ

وتتكاملُ فقراتُ هذا البحثِ مع ما تمَّ التّدرُّب عليه في أعوامٍ سابقةٍ

ضمنَ تسلسلٍ يُناسبُ عمر الطّالب ودراسته.

1 - 4 التّحـــــــــــــــــــاكي



سوف تتعلّم

1) التّحاكي .
2) صورة شكل وفق تحاكٍ معلوم .
3) التّحاكي في مستوي الإحداثيّات .

أوّلاً التّحـــــــــــــــاكي

تَعلّمْتَ سابقاً أنواعاً من التّحويلات الهندسيّة هي:

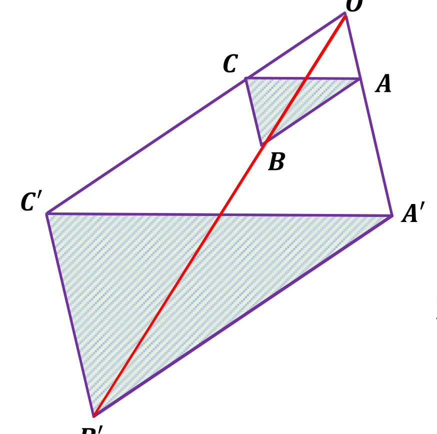
الانسحاب، الانعكاس على محور، الانعكاس في نقطة، الدّوران،

وجميعها تحافظُ على الأطوال،

والتّحويل الهندسيّ الذي يحافظ على الأطوال يُسمّى تقايساً.

وهناك تحويلات هندسيّة لا تحافظُ على الأطوالِ منها التّحاكيّ

نشاط



تأمّلِ الشّكلَ المجاور: $OA=1 \quad , \quad OB=2 \quad , \quad OC=1.5$

$OA'=3 \quad , \quad OB'=6 \quad , \quad OC'=4.5$

1. احسبْ: $\frac{OC'}{OC}$ ، $\frac{OB'}{OB}$ ، $\frac{OA'}{OA}$

نُسمّي النّقطةَ A' صورة النّقطة A وفقَ تحاكٍ مركزه النّقطة O ونسبته 3

والنّقطةَ B' صورة النّقطة B وفقَ تحاكٍ مركزه النّقطة O ونسبته 3

والنّقطةَ C' صورة النّقطة C وفقَ تحاكٍ مركزه النّقطة O ونسبته 3

2. إن $3 = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB}$ (علّل) $OA' = 3OA \ , \ OB' = 3OB \ , \ OC' = 3OC$

$(A'B') /\!/ (AB)$ و $(C'A') /\!/ (CA)$ و $(B'C') /\!/ (BC)$

يُسمّى المُثلّث ABC تصغيراً للمُثلّث $A'B'C'$ ونسبة التّصغير $\frac{1}{3}$

ويُسمّى المُثلّث $A'B'C'$ تكبيراً للمُثلّث ABC ونسبة التّكبير 3

تعلّم

تعريف التّحاكيّ

لتكن لدينا النّقطة الثابتة O والعدد الحقيقي $k \neq 0$.

والنّقطة M المختلفة عن O،

تكون M' صورة M وفق التحاكي الذي مركزُهُ النّقطة O ونسبته k،

إذا تحقّق الشّرطان الآتيان:

أ) M' نقطةٌ من المستقيم (OM) تختلفُ عن O.

ب) $\frac{OM'}{OM} = k$

صورةُ النّقطة O هي O ذاتها وفق هذا التّحويل.

يتعيّن التّحاكيّ بمعرفة المركز O والنّسبة k.

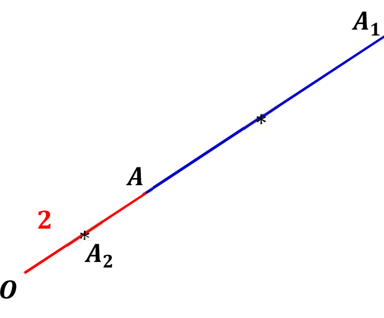
لرسم صورة نقطة M وفق تحاكٍ معلوم (مركزُه النّقطةُ O ونسبته k)

نرسمُ المستقيم (OM) ونعيّنُ عليه نقطة M' بحيث $OM' = k\ OM$

ملاحظة:

تقتصر دراستنا على $k > 0$

تطبيق ①



تأمّلِ الشّكلَ المجاور: $OA = 2$

1) ارسمْ A_1 صورة A وفقَ التّحاكي الذي مركزُهُ النّقطةُ O ونسبته 3.

2) ارسمْ A_2 صورة A وفقَ التّحاكي الذي مركزه النّقطة O ونسبته $\frac{1}{2}$.



تطبيق ②

تأمّل الشّكل المجاور:

1. B صورة A وفقَ تحاكٍ مركزه النّقطة O عيّن نسبته.

الحل

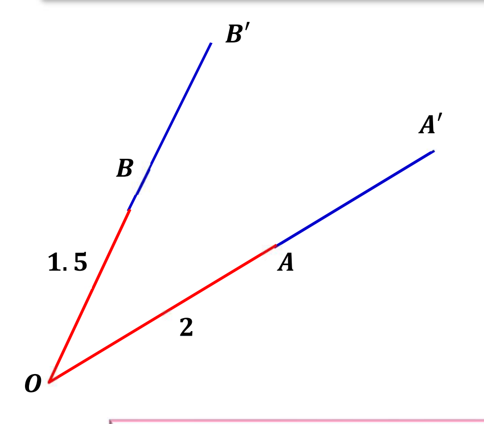
$OB = k\ OA$ نعوّض $2 = k(5)$ ومنه $k = \frac{2}{5}$

2. A صورة B وفقَ تحاكٍ مركزه النّقطة O عيّن نسبته.

الحل

$OA = k\ OB$ نعوّض $5 = k(2)$ ومنه $k = \frac{5}{2}$

نشاط



تأمّلِ الشّكلَ المجاور : $OB = 1.5\,, OA = 2$

ارسمْ A' صورة A وفقَ التّحاكي الذي مركزه النّقطة O ونسبته 2

ارسمْ B' صورة B وفقَ التّحاكي الذي مركزه النّقطة O ونسبته 2.

أثبتْ أنّ: $(A'B') \mathbin{/\!/} (AB)$ وأن: $A'B' = 2AB$

نقبلُ أنّ: $[A'B']$ صورة $[AB]$ وفقَ التّحاكي الذي مركزه النّقطة O ونسبته 2.

تعلّم

1) صورةُ قطعة مستقيمة $[AB]$ وفق تحاكٍ مركزه النّقطة O ونسبته k.
هي القطعة المستقيمة $[A'B']$ حيث: A' صورة A، B' صورة B و $A'B' = kAB$.

2) صورة المستقيم (AB) وفق تحاكٍ مفروض هو مستقيم $(A'B')$ يوازيه.

3) صورة المُضلّع $ABCD$ وفق تحاكٍ مفروض هو المُضلّع $A'B'C'D'$
حيث: A' صورة A، B' صورة B ، C' صورة C، D' صورة D.

(أي: لرسم صورة مُضلّع وفق تحاكٍ مفروض نُعيّن صور رؤوسه ثُمَّ نصل بينها).

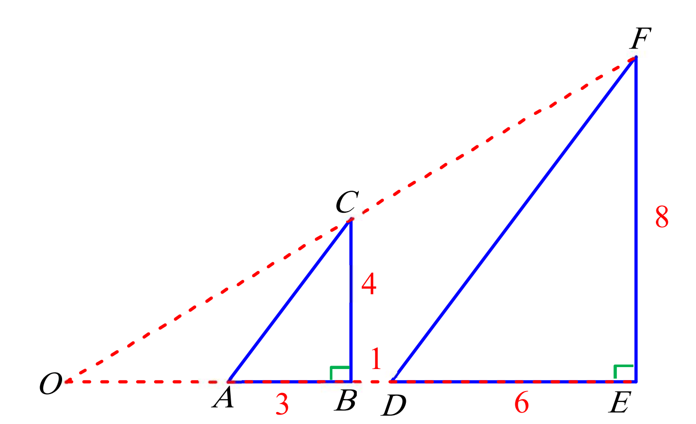
تطبيق

في الشّكل المجاور

المُثلّث DEF صورة المُثلّث ABC

وفقَ تحاكٍ مركزه O، احسب OA .



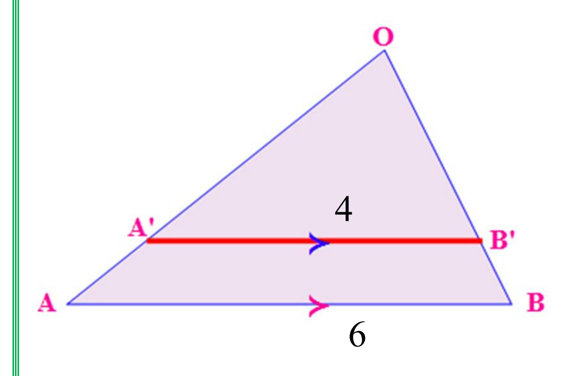


من تشابه المُثلّثين $OBC\,,\,OEF$

$$\frac{BC}{EF} = \frac{OB}{OE} \quad \text{أي} \quad \frac{4}{8} = \frac{OA+3}{OA+10}$$

ومنه $\frac{1}{2} = \frac{OA+3}{OA+10}$ بالتالي $OA = 4$

مثال



في الشّكل المجاور :

المُثلّث OAB فيه: $(AB)\mathbin{/\!\!/}(A'B')$

بيِّن أنّ المُثلّث $OA'B'$ صورة المُثلّث OAB

وفقَ تحاكٍ عيّن مركزه، ثُمَّ احسبْ نسبته.

الحل

المُثلّثان $OAB\,,\,OA'B'$ متشابهان لأنّ $((AB)\mathbin{/\!\!/}(A'B'))$

نكتبُ نسبَ التّشابه $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}$

من $\frac{2}{3}=\frac{OB'}{OB}$ وملاحظة أنّ النّقاط O,B,B' على استقامة واحدة نستنتجُ أنّ:

B' صورة B وفقَ التّحاكي الذي مركزه o ونسبته $\frac{2}{3}$.

بالمثل نجد أنّ A' صورة A وفقَ هذا التّحاكي.

وتَعْلَم أنّ صورة o هي ذاتها وفقَ هذا التّحاكي.

إذن $OA'B'$ صورة OAB وفقَ هذا التّحاكي.

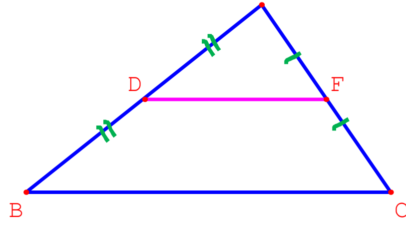
تعلّم

إذا قطع مستقيم $(A'B')$ ضلعي مُثلّث OAB أو امتداديهما موازياً (AB)

بحيث $(AB),(A'B')$ بجهة واحدة نسبة إلى O،

يتشكّلُ مُثلّث $OA'B'$ هو صورة المُثلّث OAB بتحاكٍ مركزه النّقطة O ونسبته k (نسبة تشابه المُثلّثين).





تأمّل الشّكل المجاور

ثُمَّ عيّن التّحويل الهندسيّ الذي يُحوِّل المُثلّث ABC إلى المُثلّث ADF.

الحل

$$AC = 2AF \quad , \quad \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$AB = 2AD \quad , \quad \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$$

أي أنّ: F صورة C وفق تحاكٍ مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$.

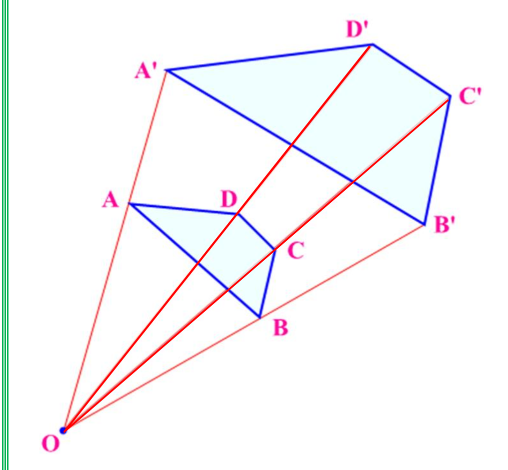
D صورة B وفق تحاكٍ مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$.

A صورة A ذاتها وفق التحاكي السابق.

فالمثلث ADF صورة المثلث ABC وفق تحاكٍ مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$.



تأمّلِ الشّكلَ المجاور:



المُضلّع $A'B'C'D'$ صورة المُضلّع $ABCD$

وفقَ تحاكٍ مركزه النّقطة O ونسبته k .

برهِنْ أنّ هذين المُضلّعين متشابهان.

الإثبات:

من الفرض ينتج: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA}$

و $(AB) \parallel (A'B')$, $(AD) \parallel (A'D')$

ومنه: $B\hat{A}D = B'\hat{A'}D'$ (زاويتان أضلاعهما متوازية ومن نوع واحد)

وبالمثل: $A\hat{D}C = A'\hat{D'}C'$ ، $D\hat{C}B = D'\hat{C'}B'$ ، $C\hat{B}A = C'\hat{B'}A'$

فالمُضلّعان متشابهان. (تساوت زواياهما المتقابلة وتناسبت أطوال أضلاعهما المتقابلة)

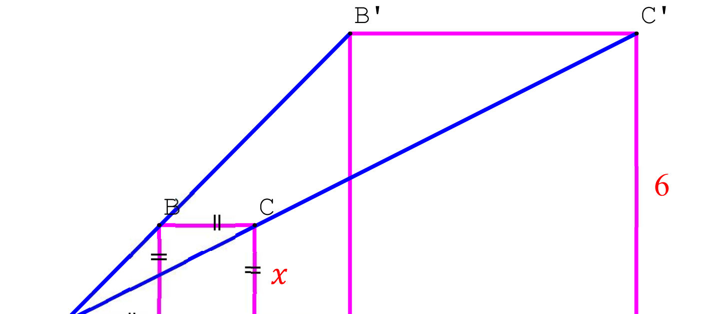


1) المُضلّعان المتحاكيان متشابهان.

2) التّحاكي الذي نسبته مختلفة عن العدد 1 ليس تقايساً.

مثال

تأمَّلِ الشّكلَ المجاور:



إذا كان المُربّع $A'B'C'D'$ صورة المُربّع $ABCD$

وفقَ تحاكٍ مركزه النّقطة O، فاحسب x.

الحل

بما أنّ A' صورة A وفقَ التّحاكي المطلوب

فإنّ $3 = \frac{3x}{x} = \frac{OA'}{OA} = k$ ولكن $\frac{C'D'}{CD} = k$ أي $3 = \frac{6}{x}$ ومنه $x = 2$

مثال

C دائرةٌ مركزُها A وطولُ نصف قطرها 1،

النّقطة O خارج الدّائرة بحيث: $OA = 3$.

1) ارسم A' صورة A وفقَ التّحاكي الذي

مركزُهُ النّقطة O ونسبته 2.



2) بفرض $M \in C$ (نقطة اختيارية من الدّائرة).

a) ارسمْ M' صورة M وفقَ هذا التّحاكي.

b) بيِّن أنّ : $A'M' = 2$.

c) استنتجْ صورة الدّائرة C وفقَ هذا التّحاكي.

الحل

1) بما أنّ A' صورةُ A وفقَ التّحاكي الذي مركزُهُ النّقطة O ونسبته 2 فإنّ: $\frac{OA'}{OA} = 2$ أي: $OA' = 2\,(OA)$.

2)

a) بما أنّ M' صورة M وفقَ التّحاكي الذي مركزُهُ النّقطة O ونسبته 2

فإن $\frac{OM'}{OM} = 2$ أي $OM' = 2(OM)$

b) تعلّمنا أنّ $A'M' = 2AM$ ومنه $A'M' = 2$

c) النّقطة المتحولة M' تبعد عن النّقطة الثابتة A' بمسافة ثابتة مقدارها 2

فهي ترسم الدّائرة C' التي مركزها A' وطول نصف قطرها $A'M' = 2$.

نستنتجُ أنّ الدّائرة C' صورة الدّائرة C وفقَ التّحاكي الذي مركزه النّقطة O ونسبته 2.

تعلّم

صورةُ دائرة C طولُ نصف قطرها R وفقَ تحاكٍ نسبته k، هي دائرة C' مركزُها صورة مركز الدائرة C، وطول نصف قطرها R' يساوي kR.

تطبيق

C دائرةٌ مركزها O وطولُ نصف قطرها 1، ارسم C' صورة C وفقَ التّحاكي الذي مركزُه النّقطة O ونسبته $\frac{3}{2}$.

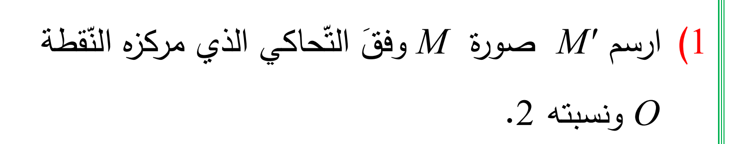
الحل

نفترض أنّ M نقطة من C فيكون $\frac{3}{2} = \frac{OM'}{OM}$

حيث أنّ: M' نقطة من C'

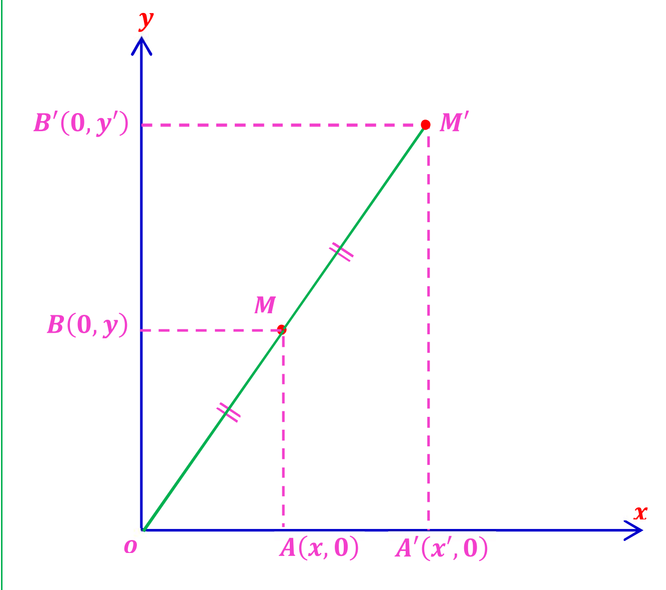
$OM' = \frac{3}{2}$ لأنّ $OM = 1$

C' دائرة مركزها O وطول نصف قطرها $\frac{3}{2}$.



مثال

في الشّكل المجاور:



1) ارسم M' صورة M وفقَ التّحاكي الذي مركزه النّقطة O ونسبته 2.

2) ما إحداثيّات M ؟

3) بفرض $M'(x', y')$ صورة النّقطة M وفقَ التّحاكي السّابق بيِّن أنّ $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$

الحل

1) نرسمُ نصف المُستقيم $[OM)$ ونأخذُ عليه M' بحيث $OM' = 2(OM)$

2) إنّ إحداثيي M هي (x, y) ﴿علّل﴾ $x_A = x_M$ ، $y_B = y_M$

3) نرسمُ من M' موازياً لمحور التّراتيب فيقطع محور الفواصل في النّقطة A'

نرسم من M' موازياً لمحور الفواصل فيقطع محور التّراتيب في النّقطة B'

إنّ A' صورة A وفقَ التّحاكي السّابق ﴿علّل﴾ $OA' = 2OA$

إنّ B' صورة B وفقَ التّحاكي السّابق ﴿علّل﴾ $OB' = 2OB$

ومنه $A'(2x, 0)$ و $B'(0, 2y)$

إذن: $M'(2x, 2y)$ ﴿علّل﴾ $x_{M'} = x_{A'}\ , y_{M'} = y_{B'}$

ومنه $\left.\begin{matrix} x' = 2x \\ y' = 2y \end{matrix}\right\}$

تعلّم

في المستوي الإحداثي إذا كانت $M'(x', y')$ صورة $M(x, y)$ وفقَ التّحاكي الذي مركزُهُ مبدأُ الإحداثيات O ونسبته k فإن: $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

تطبيق

ABC مُثلّث رؤوسه $A(2,0), C(0,1), B(3,2)$، $A'B'C'$ صورة المُثلّث ABC وفقَ التّحاكي الذي مركزه النّقطة O ونسبته 3.

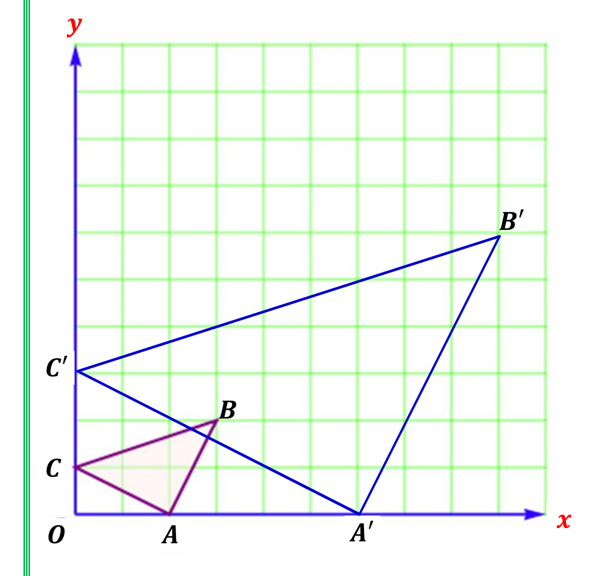


$A(2,0) \longrightarrow A'(6\ ,0)$

$B(3,2) \longrightarrow B'(9\ ,6)$

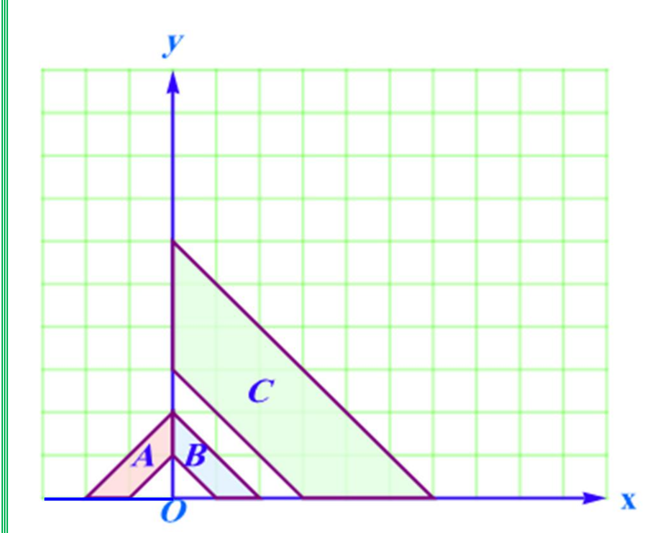
$C(0,1) \longrightarrow C'(0\ ,3)$

ثم ارسم المُثلّث $A'B'C'$ في مستوي الإحداثيّات.



نشاط

تأمّلِ الشّكلَ المجاور **ثم أكمل كلاً ممّا يأتي**:



1) الشّكل B صورة الشّكل A بانعكاس (الانعكاس تقايس) على محور التراتيب $[oy)$

2) الشّكل C صورة B وفقَ تحاكٍ مركزه النّقطة o ونسبته 3.

إنّ A يشابه C ، **لماذا** ؟ A , B متطابقان، B يُشابه C لأن: C , B متحاكيان، إذن: A يُشابه C.

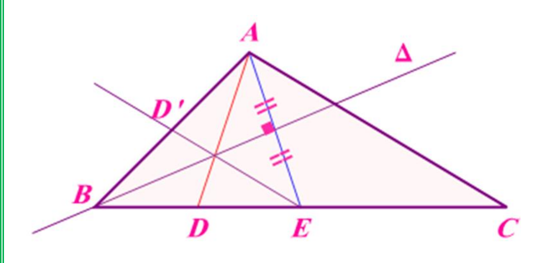
نُسمّي الشّكل C صورة الشّكل A وفقَ مُركّب الانعكاس والتّحاكي السّابقين وبهذا التّرتيب.



تعلّم

صورة شكل وَفْقَ مُركّب تقايسٍ وتحاكٍ هو شكل يشابهه.

تطبيق





في الشّكل المجاور: ABC مُثلّثٌ فيه: $AB = 4 , BC = 8$.

E منتصف $[BC]$ ، D منتصف $[BE]$.

بفرض D' صورة D بالانعكاس على Δ (محور $[AE]$).



1) بيّن أنّ المُثلّث BED' هو انعكاس المُثلّث ABD على المحور Δ.

2) أثبت أنّ المُثلّث ABC صورة المُثلّث BED' وفقَ تحاكٍ، عيّن مركزه وأوجد نسبته.

3) ما التّحويلُ الذي يجعل المُثلّث ABC صورة للمُثلّث ABD ؟ ثُمَّ استنتجْ أنّ هذين المُثلّثين متشابهان.

الحل:

1) المُثلّث ABE متساوي الساقين، ﴿علّل﴾ لأنّ: B نقطة من Δ محور $[AE]$ فإنّ $BA=BE$

بالانعكاس على المحور Δ:

صورة النّقطة B هي النّقطة B ﴿علّل﴾ لأنّ: B نقطة من Δ

صورة النّقطة A هي النّقطة E ﴿علّل﴾ لأنّ: Δ محور $[AE]$

صورة النّقطة D هي النّقطة D' ﴿علّل﴾ (فرضاً)

إذن المُثلّث BED' هو انعكاس المُثلّث ABD على المحور Δ.

2) D' منتصف $[AB]$ لأنّ D منتصف $[BE]$ ومنه $(ED') \parallel (AC)$

نستنتجُ أنّ المُثلّثَ ABC صورةَ المُثلّث BED' وفقَ تحاكٍ مركزه B ونسبته 2 ﴿علِّل﴾

$BC = 2BE$
$BA = 2BD'$

3) المُثلّث BED' صورة للمُثلّث ABD بانعكاس على المحور Δ

والمُثلّث ABC صورة للمُثلّث BED' وفقَ تحاكٍ مركزه B ونسبته 2.

إذن: المُثلّث ABC صورة المُثلّث ABD وفقَ التّحويل الذي هو مُركّب الانعكاس والتّحاكي السّابقين بهذا التّرتيب

بما أنّ المُثلّث ABC صورة المُثلّث ABD وفقَ مُركّب تقايس وتحاك فهما متشابهان.

حاول أن تحل

تأمّلِ الشّكلَ المجاور:

$C_1(O_1, 4), C_2(O_2, R)$ دائرتان متماستان خارجاً، $\hat{O} = 30^\circ$.

1) احسب R.

2) الدّائرة C_2 صورة الدّائرة C_1 وفقَ تحاكٍ عيِّن مركزُهُ ثُمَّ أوجدْ نسبته.

الحل

1) المثلث OO_1B قائم في الزاوية B وفيه $\hat{O} = 30^\circ$

وبالتالي $O_1O = 2(O_1B) = 8$

المثلثان O_1BO , O_2AO متشابهان (قائمان وفيهما زاوية مشتركة).

نكتب نسب التشابه:

$$\frac{O_2A}{O_1B} = \frac{O_2O}{O_1O} = \frac{AO}{BO}$$

نعوض فنجد: $\frac{R}{4} = \frac{O_2O}{O_1O} = \frac{R+4+8}{8} = \frac{R+12}{8}$ نطبق خاصة الضرب التقاطعي

نجد $R = 12$

2) نسبة التحاكي $\frac{O_2O}{O_1O} = \frac{24}{8} = 3$ أو $\frac{O_2A}{O_1B} = \frac{12}{4} = 3$



4 - 2 الانســــحاب في مســـتوي الإحـــداثيات

سوف تتعلّم

- قوانين الانسحاب في المستوي الإحداثي

نشاط

تذكر: الانسحاب ينقل كل نقطة في المستوي المسافة ذاتها بالاتجاه ذاته

لتكنِ النّقطةُ $A(2,3)$ في مستوي الإحداثيّات:

1. ارسم $A_1(x_1, y_1)$ صورة النّقطة A بالانسحاب 2 وحدة إلى اليمين و 4 وحدات إلى الأعلى تجد $A_1(4,7)$

إنّ $\left.\begin{array}{l} x_1 = 4 = 2 + 2 \\ y_1 = 7 = 3 + 4 \end{array}\right\}$

لاحظ أنّنا حصلنا على A_1 بإضافة 2 إلى فاصلة A وإضافة 4 إلى ترتيب A.

نقول إنّ A_1 صورة A بانسحاب $+2$ على محور الفواصل و $+4$ على محور التّراتيب.

2. ارسم $A_2(x_2, y_2)$ صورة النّقطة A بالانسحاب 3 وحدات إلى اليسار و 2 وحدة إلى الأعلى تجد $A_2(-1,5)$

إنّ $\left.\begin{array}{l} x_2 = -1 = 2 + (-3) \\ y_2 = 5 = 3 + 2 \end{array}\right\}$

لاحظ أنّنا حصلنا على A_2 بإضافة (-3) إلى فاصلة A وإضافة 2 إلى ترتيب A.

نقول إنّ A_2 صورة A بانسحاب -3 على محور الفواصل و $+2$ على محور التّراتيب.

3. أوجد $A_3(x_3, y_3)$ صورة النّقطة A بالانسحاب 3 وحدات إلى اليسار و 2 وحدة إلى الأسفل تجد $A_3(-1,1)$

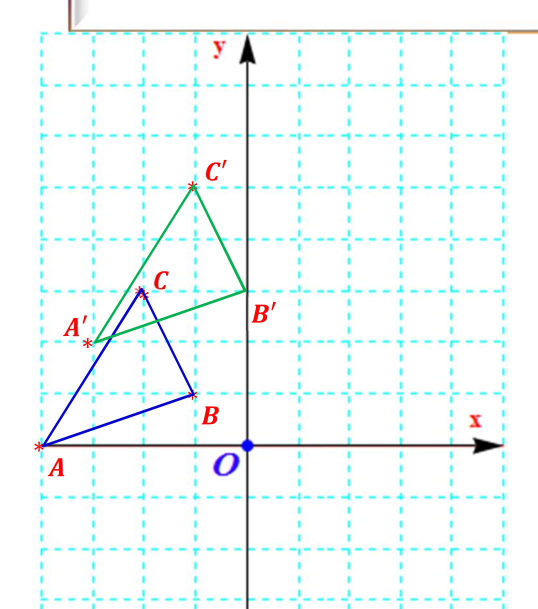
حيثُ: $\left.\begin{array}{l} x_3 = -1 = 2 + (-3) \\ y_3 = 1 = 3 + (-2) \end{array}\right\}$

لاحظ أنّنا حصلنا على A_3 بإضافة (-3) إلى فاصلة A وإضافة (-2) إلى ترتيب A.

تعلّم

إذا كانت النّقطة A' صورة النّقطة A بانسحاب a على محور الفواصل و b على محور التّراتيب

فإنّ قاعدة الانسحاب هي: $A(x,y) \to A'(x+a, y+b)$



تطبيق

ليكن لدينا المُثلّث ABC الذي رؤوسه

$A(-4,0)$, $B(-1,1)$, $C(-2,3)$

عيّن إحداثيي كلّ من: A', B', C'

صور رؤوس المُثلّث ABC وفقَ الانسحاب المعرّف

بالقاعدة: $(x,y) \to (x+1, y+2)$

ثُمَّ ارسمْ هذين المُثلّثين في مستوي الإحداثيّات.

الحل

$A'(-3,2)$, $B'(0,3)$, $C'(-1,5)$

حاول أن تحل

ليكن المُثلّث ABC الذي رؤوسه

$A(-3,2)$, $B(-2,0)$, $C(0,1)$

1) ارسمْ المُثلّث $A'B'C'$ صورة المُثلّث ABC

وفقَ الانسحاب المعرّف بالقاعدة:

$(x,y) \to (x+4, y-1)$ في مستوي

الإحداثيّات

2) ارسمْ $A''B''C''$ صورة المُثلّث $A'B'C'$

وفقَ التّحاكي الذي مركزه النّقطة O ونسبته 2

3) بيّن أنّ $A''B''C''$ يشابه المُثلّث ABC {علّل}

$A''B''C''$ صورة المُثلّث $A'B'C'$ وفقَ التّحاكي المفروض، فالمثلثان $A'B'C'$, $A''B''C''$ متشابهان.

ولكن المثلثين ABC , $A'B'C'$ متطابقان (الانسحاب تقايس)

إذن $A''B''C''$ يُشابه ABC.

تحقّق من فهمك

اكتب القاعدة لكلّ انسحاب ممّا يأتي:

1) وحدتان إلى اليمين ثُمَّ 4 وحدات إلى الأسفل.

2) نصف وحدة إلى اليمين ثُمَّ 4 وحدات إلى الأعلى.

3) وحدتان إلى اليسار ثُمَّ $\sqrt{3}$ وحدة إلى الأسفل.

4) $\frac{2}{3}$ وحدة إلى اليسار ثُمَّ $\frac{5}{4}$ وحدة إلى الأعلى.

1) $(x , y) \rightarrow (x + 2 , y - 4)$

2) $(x , y) \rightarrow \left(x + \frac{1}{2} , y + 4\right)$

3) $(x , y) \rightarrow (x - 2 , y - \sqrt{3})$

4) $(x , y) \rightarrow \left(x - \frac{2}{3} , y + \frac{5}{4}\right)$

3 - 4 مُركـــــــــب انعكاســـــــين



سوف تتعلّم

- مُركّب انعكاسين نسبة إلى مستقيمين متقاطعين .
- مُركّب انعكاسين نسبة إلى مركزين معلومين .

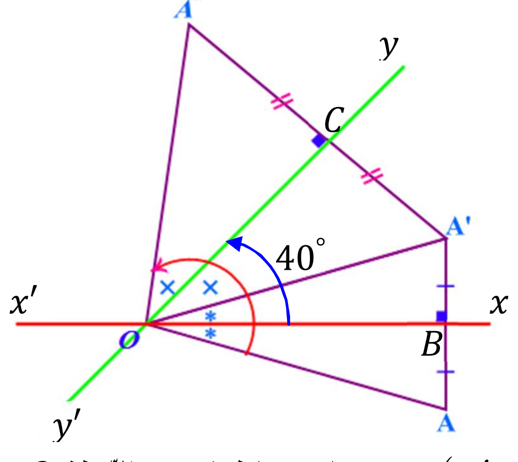
أوّلاً مُركّب انعكاسين نسبة إلى مستقيمين متقاطعين

تذكر

- الانعكاس على محور Δ يُعيِّن لكلّ نقطة A من المستوي لا تنتمي إلى Δ صورة A' حيثُ Δ محور $[AA']$ ، وانعكاس كلّ نقطة من Δ هو النّقطة ذاتها.
- الدّوران الذي مركزه O وزاويته θ (باتجاه مباشر أو غير مباشر) يَقْرِن كلّ نقطة A من المستوي مختلفة عن O إلى النّقطة A' بحيثُ:
$OA = OA'\,, A\hat{O}A' = \theta$
وصورة O ذاتها.

نشاط

تأمّل الشّكل الآتي:



$(x'x)$, $(y'y)$ مستقيمان متقاطعان في النّقطة O.

نأخذُ $x\hat{O}y$ وليكن قياسها $x\hat{O}y = 40^\circ$ (مثلاً).

A نقطةٌ معلومة، A' صورة A بانعكاس على المستقيم $(x'x)$

A'' صورةُ A' بانعكاس على المستقيم $(y'y)$

بيِّن أنّ A'' صورةُ A بدوران مركزُه النّقطة O وقياس زاويته 80° بالاتجاه المباشر.

الحل:

OAA' مُثلّث متساوي السّاقين ﴿علِّل﴾ لأنّ A' انعكاس A نسبة إلى المحور $(x'x)$.

$OA'A''$ مُثلّث متساوي السّاقين ﴿علِّل﴾ لأنّ A'' انعكاس A' نسبة إلى المحور $(y'y)$.

ومنه: $OA = OA'$

$$A\hat{O}A'' = A\hat{O}A' + A'\hat{O}A''$$

$$A\hat{O}A'' = 2B\hat{O}A' + 2C\hat{O}A'$$

$$A\hat{O}A'' = 2(B\hat{O}A' + C\hat{O}A')$$

$$A\hat{O}A'' = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$$

أي أنّ A'' تنتجُ عن A بدوران مركزه النّقطة O وقياس زاويته يساوي 80°،

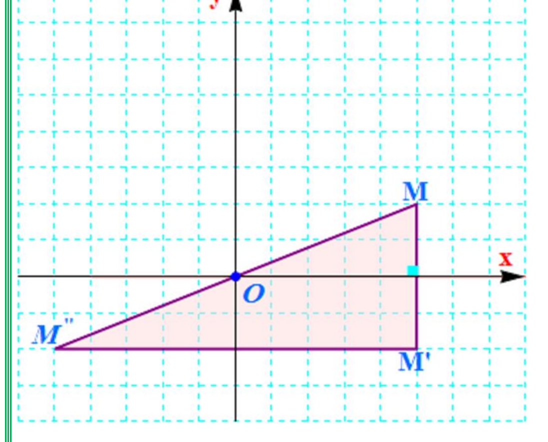
وجهة الدّوران في الشّكل عكس دوران عقارب السّاعة (الاتجاه المباشر).

تعلّم

مُركّب انعكاسين نسبة إلى المستقيمين $(x'x)$, $(y'y)$ المتقاطعين في O

حيث $x\hat{O}y = \theta^\circ$ هو دوران مركزه O وقياس زاويته 2θ واتجاهه من $(x'x)$ إلى $(y'y)$.

تطبيق



M نقطة في الرّبع الأوّل من المستوي الإحداثي. M' انعكاس M على محور الفواصل، M'' انعكاس M' على محور التّراتيب أثبت أنّ:

M, O, M'' تقع على استقامة واحدة.

الحل

M'' صورةُ M وفقَ مُركّب الانعكاسين نسبة إلى محوري الإحداثيّات المتقاطعين في O وزاويتهما 90°.

M'' صورةُ M وفقَ الدّوران الذي مركزه النّقطة O وزاويته $180^\circ = 2 \times 90^\circ$ ﴿علِّل﴾ حسب التّعلُّم السابق

والدّوران الذي زاويته 180° هو انعكاس في مبدأ الإحداثيّات.

إنّ: M, O, M'' تقع على استقامة واحدة.

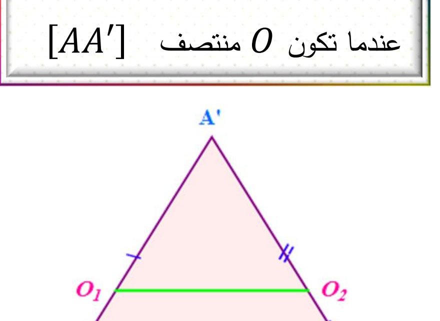
ثانياً مركب انعكاسين نسبة إلى مركزين معلومين

O_1 , O_2 نقطتان ثابتتان، المسافة بينهما $3cm$ و A نقطة معلومة.
بفرض A' صورة A بالانعكاس في النّقطة O_1، A'' صورة A' بالانعكاس في النّقطة O_2، بيِّن أنّ A'' تنتج عن A بانسحاب، احسب مسافته وعيّن جهتَهُ؟

الحل

في المُثلّث $AA'A''$: O_1 منتصف $[AA']$ ، O_2 منتصف $[A'A'']$ نستنتج أنّ: $AA'' = 2(O_1,O_2) = 2(3) = 6\ cm$ و $(AA'') \parallel (O_1O_2)$،
إذن A'' تنتجُ عن A بانسحاب جهته من O_1 إلى O_2
ومسافة الانسحاب تساوي $6cm$

تذكر
A' انعكاس A بالنسبة للنقطة O عندما تكون O منتصف $[AA']$



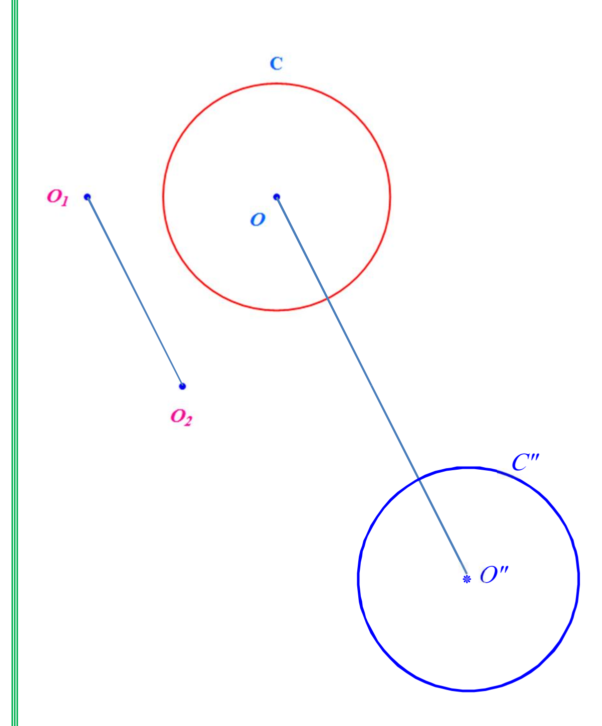
تعلّم
مُركّب انعكاسين نسبة إلى مركزين O_1 , O_2 وبهذا التّرتيب هو الانسحاب الذي مسافته $2O_1O_2$ وجهته من O_1 إلى O_2

تطبيق:

O_1, O_2 نقطتان ثابتتان، $C(O,R)$ دائرة ثابتة،
ارسم الدّائرة C'' صورة الدّائرة C
وفقَ مُركّب الانعكاسين نسبة إلى O_1 ثم O_2.

الحل:

C'' صورة C بالانسحاب مسافته $2O_1O_2$ وجهته من O_1 إلى O_2
إذنْ C'' طبوقة على C ومركزها O'' صورة O بالانسحاب السّابق.
نرسمُ $[OO'']$ الموازي لـ $[O_1O_2]$ وَ $OO'' = 2O_1O_2$
ثُمَّ نرسمُ الدّائرة التي مركزها O'' ونصف قطرها R.



مسائل محلولة



المسألة الأولى

تأمَّلِ الشّكلَ المجاور:

ABC مُثلّث، نرسمُ المُربّعين $ACMN$, $ABDE$

F نقطة من $[EA)$ بحيث: $AE=AF$.

1) أثبتْ أنّ المُثلّثين AFN , ABC متطابقان.

2) أثبتْ أنّ المُثلّثين AEN , ABC متكافئان (لهما المساحة ذاتها).

الحل:

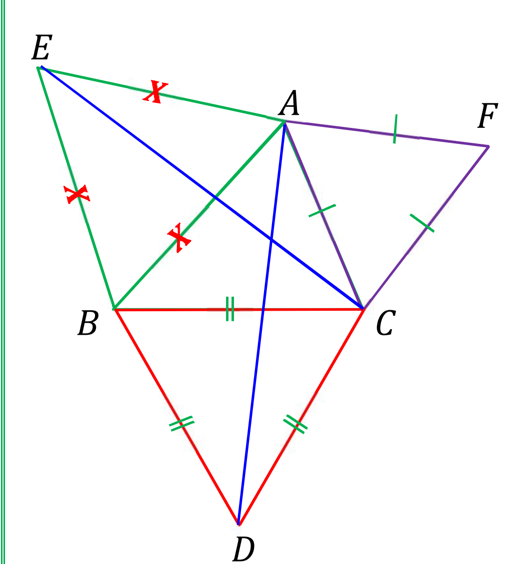
1) إنّ F صورة B وفقَ دوران مركزه A وزاويته 90° باتجاه دوران عقارب السّاعة، وإنّ N صورة C وفقَ الدّوران السّابق، و A صورتها ذاتها وفقَ هذا الدوران.

إذن: المُثلّث AFN صورة المُثلّث ABC وفقَ الدّوران السّابق فهما متطابقان.

2) المُثلّثان NAE , AFN متكافئان ﴿علِّل﴾ لأنّ: $[NA]$ متوسط في المثلث NFE .

المُثلّثان ABC , AFN طبوقان فهما متكافئان.

نستنتجُ أنّ المُثلّثين ABC , NAE متكافئان



المسألة الثانية

تأمَّلِ الشّكلَ المجاور:

ABC مُثلّث، ABE , BCD , ACF مُثلّثات كلّ منها متساوي الأضلاع.

1) أثبتْ أنّ المُثلّث ABD صورة المُثلّث EBC وفقَ دوران عيّن مركزه وزاويته واتجاهه.

2) استنتجْ أنّ: $AD = BF = CE$.

الحل:

1) المُثلّث ABD صورة المُثلّث EBC وفقَ الدّوران الذي مركزه النّقطة B، وقياس زاويته 60° باتجاه دوران عقارب السّاعة، لأنّ: D صورة C، A صورة E، B صورة ذاتها وفقَ هذا الدّوران.

2) المُثلّثان EBC , ABD طبوقان ﴿علِّل﴾ لأنّ: ABD صورة المثلث EBC فهما متطابقان.

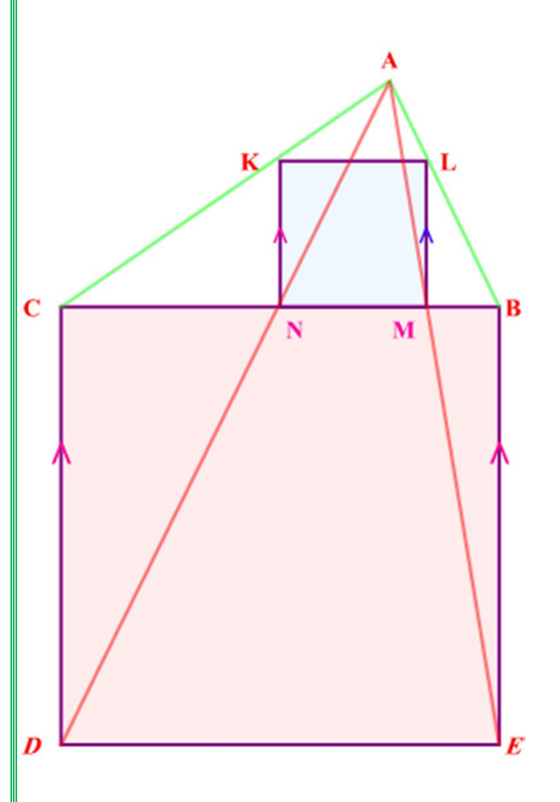
من تطابق المُثلّثين EBC , ABD نجد: $CE=AD$ (1)

بالمثل من تطابق المُثلّثين ACD , BCF نجد: $BF=AD$ (2)

من (1)، (2) نستنتجُ أنّ $AD=BF=CE$.

المسألة الثّالثة

تأمَّلِ الشّكلَ المجاور:



ABC مُثلّثٌ أنشأنا على ضلعه $[BC]$ المُربّع $BCDE$

1) أثبتْ أنّ المُربّع $BCDE$ صورة $KNML$ بتحاكٍ مركزه A.

2) استنتجْ أنّ $KNML$ مُربّع.

الحل:

1) بما أنّ: $(BE)\parallel(ML)\parallel(KN)\parallel(CD)$، فإن:

B صورة L وفقَ تحاكٍ مركزه النّقطة A ونسبته $\frac{AB}{AL}$

E صورة M وفقَ تحاكٍ مركزه النّقطة A ونسبته $\frac{AE}{AM}$

D صورة N وفقَ تحاكٍ مركزه النّقطة A ونسبته $\frac{AD}{AN}$

C صورة K وفقَ تحاكٍ مركزه النّقطة A ونسبته $\frac{AC}{AK}$

وبما أنّ: $\frac{AB}{AL}=\frac{AE}{AM}=\frac{AD}{AN}=\frac{AC}{AK}$

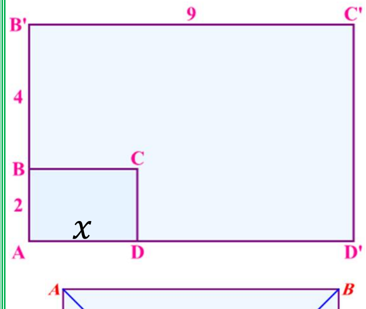
إذن المُربّع $BCDE$ صورة الشّكل $KNML$ بتحاكٍ مركزه A ونسبته إحدى النسب السّابقة.

2) المُربّع $BCDE$ يشابه $KNML$ (الشّكل يشابه صورته وفقَ تحاكٍ)

وبما أنّ $BCDE$ مُربع،

إذن $KNML$ مُربّع.

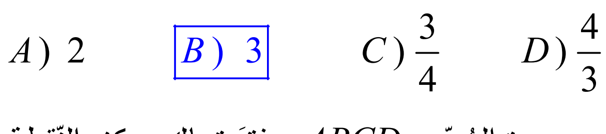
تمرينـــــــات الوحـــــــدة



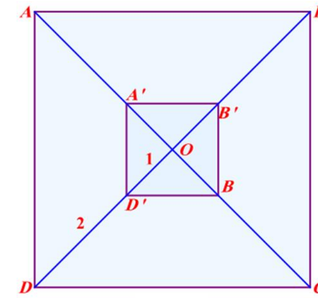
1) دُلّ على الإجابة الصّحيحة:

(أ) إذا كان المستطيل $AB'C'D'$ صورة المستطيل $ABCD$ وفقَ تحاكٍ مركزه A

فإن x تساوي:



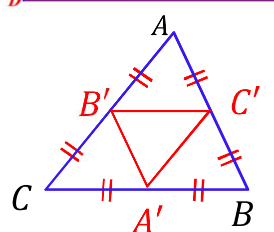
$A)\ 2$ $\boxed{B)\ 3}$ $C)\ \frac{3}{4}$ $D)\ \frac{4}{3}$



(ب) إذا كان المُربّع $A'B'C'D'$ صورة المُربّع $ABCD$ وفقَ تحاكٍ مركزه النّقطة

O فإنّ نسبة التّحاكي تساوي:

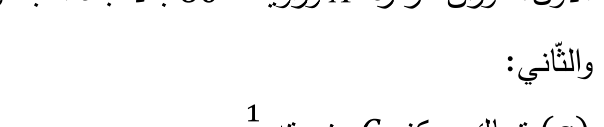
$A)\ 2$ $B)\ 3$ $C)\ \frac{1}{2}$ $\boxed{D)\ \frac{1}{3}}$



(ت) إنّ ABC صورة المُثلّث $A'B'C'$ وفقَ مُركّب تحويلين:

الأوّل: دوران مركزه A' وزاويته 60° بالاتجاه المباشر .

والثّاني:

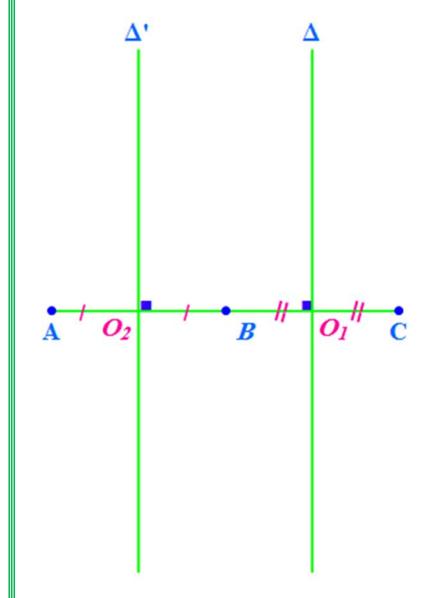


(a) تحاكٍ مركزه C ونسبته $\frac{1}{2}$.

(b) تحاكٍ مركزه C ونسبته $\frac{3}{2}$.

(c) تحاكٍ مركزه C ونسبته $\frac{2}{3}$.

$\boxed{(d)}$ تحاكٍ مركزه C ونسبته 2.



(ث) في الشّكل المجاور: Δ', Δ عمودان على $[O_1O_2]$, $O_1O_2 = d$

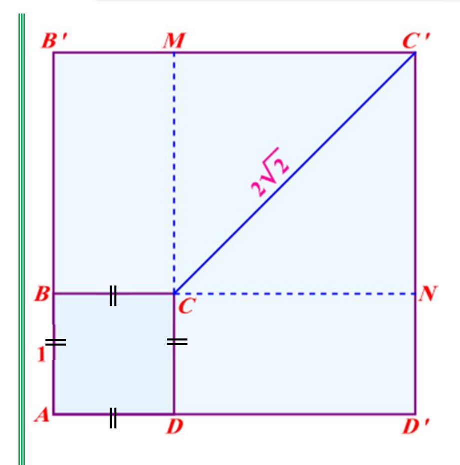
إنّ C صورة A وفق:

(A) انسحاب مسافته $2d$ وجهته من O_1 إلى O_2.

$\boxed{(B)}$ انسحاب مسافته $2d$ وجهته من O_2 إلى O_1.

(C) انسحاب مسافته d وجهته من O_1 إلى O_2.

(D) انسحاب مسافته d وجهته من O_2 إلى O_1.



2) $ABCD$ مُربّع طول ضلعه 1.

$AB'C'D'$ مُربّع بحيث $CC' = 2\sqrt{2}$

a) أثبتْ أنّ: $CNC'M$ مُربّع

واستنتجْ أنّ النّقاط A , C , C' على استقامة واحدة.

b) إذا كان المُربّع $AB'C'D'$ صورة المُربّع $ABCD$

وفقَ تحاكٍ مركزه النّقطة A، فاحسب نسبة التّحاكي.

الحل

a) $CNC'M$ متوازي الأضلاع (فيه كل ضلعين متقابلتين متوازيتان)

وبما أنّ $N\widehat{C'}M = 90^\circ$ ($AB'C'D'$ مربع)، فالرباعي $CNC'M$ مستطيل.

ولكن: $MC = BB'$ وبما أنّ: $DD' = BB'$ إذن $DD' = CN$ بالتالي الرباعي $CNC'M$ مربع.

$[CC']$ قطر في المربع $CNC'M$ إذن $C'\hat{C}N = 45^\circ$

لدينا: $A\hat{C}C' = A\hat{C}D + D\hat{C}N + N\hat{C}C' = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$

إذن: A , C , C' على استقامة واحدة.

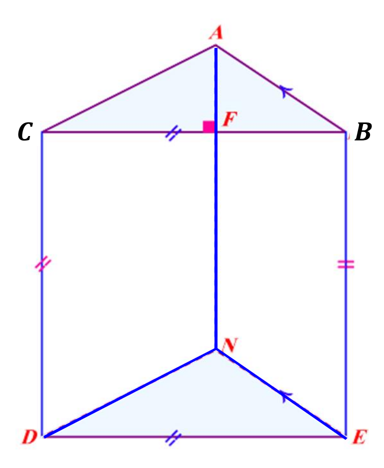
b) نسبة التحاكي $\frac{AB'}{AB} = ?$

$AB' = AB + BB' = AB + MC$

من المثلث القائم CMC' والمتساوي الساقين نجد: $MC^2 + MC'^2 = CC'^2$

$2MC'^2 = 8$ أي $MC'^2 = 4$ ومنه $MC' = 2$ وبالتالي $AB' = 1 + 2 = 3$

$\frac{AB'}{AB} = \frac{3}{1} = 3$



3) تأمَّلِ الشّكلَ المجاور : ABC مُثلّث، $BCDE$ مُربّع.

$[AF] \perp [CB]$ ، نرسم من E موازياً لـ $[AB]$

فيقطع (AF) في N.

أثبتْ أنّ المُثلّث NDE ينتج عن المُثلّث ABC بانسحاب من C إلى D

الحل

لدينا: $[CD] \mathbin{/\!/} [BE]$ (ضلعان متقابلتان في المربع).

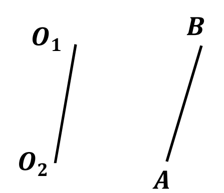
$ABEN$ متوازي الأضلاع (كل ضلعين متقابلتين متوازيتان)، إذن $BE = AN$

ومنه: $AN = BE = CD$ و $[CD] \mathbin{/\!/} [BE] \mathbin{/\!/} [AN]$ فالمثلث NED ينتج عن المثلث ABC بانسحاب مسافته CD وجهته من C إلى D.

الوحـــــــــدة الرّابعـــــــــة

التّحـــــويلات الهندســـيّة

1. في الشّكل المرسوم جانباً:



a. ارسم $[A'B']$ صورة $[AB]$ وفق تحاكٍ مركزه النّقطة O_1 ونسبته 2.

ثُمَّ ارسم $[A"B"]$ صورة $[AB]$ وفق تحاكٍ مركزه النّقطة O_2 ونسبته $\frac{3}{2}$.

b. احسب النسبة $\frac{A'B'}{A"B"}$، ثُمَّ استنتج أنّ $[A"B"]$ صورة $[A'B']$ وفق تحاكٍ عيّن مركزه.

الحل



a. الرسم.



b. $[A'B'] \parallel [AB]$ لأنّ $[A'B']$ صورة $[AB]$،

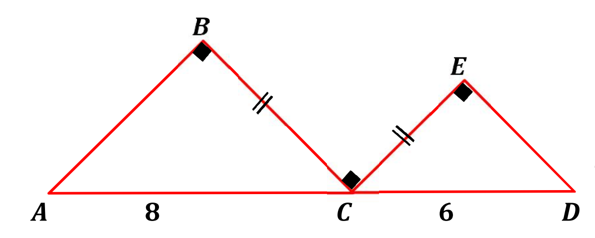
وكذلك $[A"B"] \parallel [AB]$

ومنه: $[A"B"] \parallel [A'B']$، $\frac{A"B"}{AB} = 2$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{3}{2}$

أي: $\frac{A'B'}{A"B"} = \frac{3}{4}$

فيكون: $[A"B"]$ صورة $[A'B']$ وفق تحاكٍ مركزه نقطة تقاطع $(A'A"), (B'B")$

2. في الشّكل المرسوم جانباً:



$$CE = CB\,, \hat{E} = \hat{B} = E\hat{C}B = 90^{\circ}$$
$$AC = 8\,, CD = 6$$

a. ارسم صورة المثلث CED وفق دورانٍ مركزه النّقطة C، وزاويته 90° بالاتجاه المباشر.

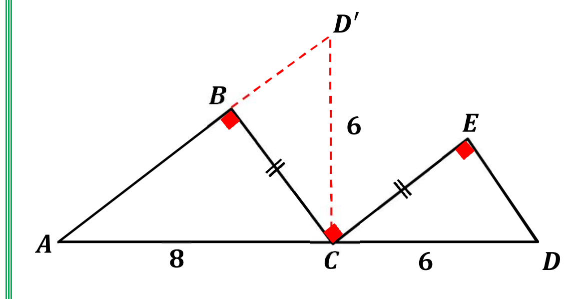
b. احسب $AB + ED$.



الحل



a. إنّ النقطة B صورة النقطة E وفق دوران مركزه C وزاويته 90° بالاتجاه المباشر.

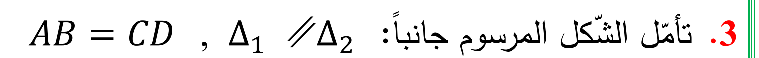


إنّ النقطة D' صورة النقطة D وفق دوران مركزه C وزاويته 90° بالاتجاه المباشر.

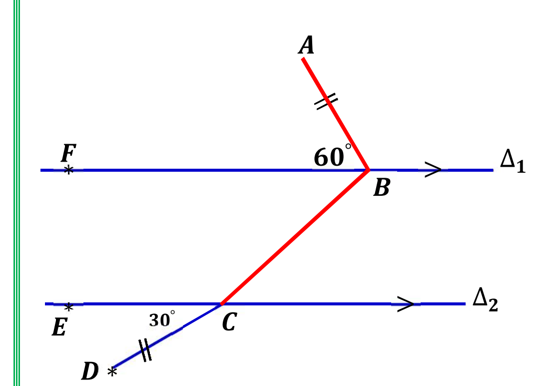
إنّ النقطة C صورة النقطة C ذاتها لأنّها مركز الدوران.

.b من الطلب السابق نحصل على المثلث $D'CA$ القائم في C وحسب فيثاغورث يكون $AD' = 10$

أي $AB + BD' = 10$ ومنه $AB + ED = 10$.



.3 تأمّل الشّكل المرسوم جانباً: $AB = CD \;\; , \;\; \Delta_1 \mathbin{/\mkern-5mu/} \Delta_2$



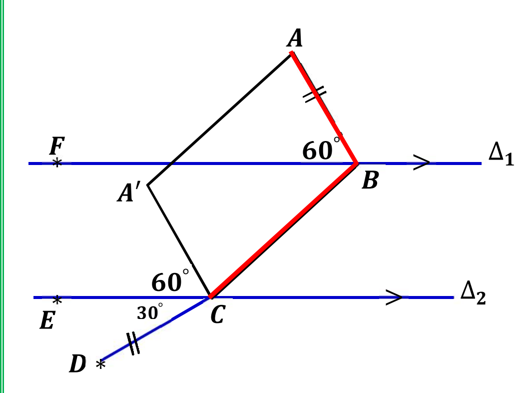
.a ارسم صورة القطعة $[AB]$ وفق انسحاب من النّقطة B إلى النقطة C،

.b بيّن أنّ $[CD]$ صورة $[AB]$ وفق مُركّب تحويلين أحدهُما الانسحاب السّابق والآخر دوران، يُطلبُ تحديده.



الحل

.a نرسم A' صورة A وفق انسحاب طوله BC وجهته من B إلى C.



.b المثلث DCA' متساوي الساقين لأنّ $CA' = CD = AB$

$A\hat{B}F = A'\hat{C}E$ زاويتان ذواتا أضلاع متوازية ومن نوع واحد.

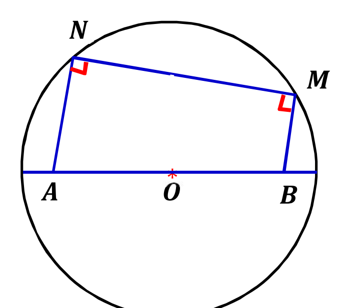
إنّ D صورة A' وفق دوران مركزه C

وقياس زاويته $A'\hat{C}D = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ بالاتجاه المباشر.

التحويل الأوّل: انسحاب طوله BC وجهته من B إلى C.

التحويل الأوّل: دوران مركزه C وقياس زاويته 90° بالاتجاه المباشر.

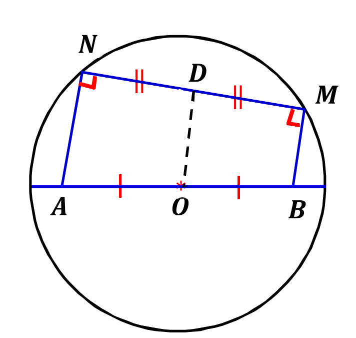
.4 في الشّكل المرسوم جانباً:



$ABMN$ شبه منحرف قائم،

بيّن أنّ النّقطة A انعكاس النّقطة B بالنسبة إلى النّقطة O.

الحل:



نرسمُ من O عموداً على (NM) وليكن $[OD]$،

عندئذٍ $DN = DM$ (مبرهنة).

إذن $OB = OA$ (مبرهنة المستقيمات المتوازية والقاطعين).

ومنه النّقطة A انعكاس النّقطة B بالنسبة إلى النّقطة O.

.5 تأمّل الشّكل المرسوم جانباً:

$ABCD$ مُربّع، طول ضلعه 2، O نقطة تلاقي القطرين.

أثبت أنّ المُثلّث CDA ينتج عن المثلث COB

وفق مركب دوران مركزه C وزاويته 45° بالاتجاه المباشر،

يليه تحاكٍ عيِّن مركزه واحسب نسبته.



الدوران الذي مركزه C وزاويته 45° بعكس دوران عقارب الساعة،

يُحوِّل B إلى B' و O إلى O' كما في الشكل المجاور.

المثلث $CO'B'$ قائم الزاوية في O' ﴿علل﴾. لأنّ $C\widehat{O'}B'$ صورة $C\hat{O}B$

بما أنّ $[O'B'] \mathbin{/\!/} [AD]$ في المثلث CDA،

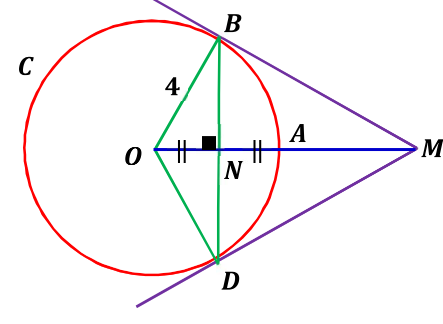
إذن: A صورة B' وفق تحاكٍ مركزه النقطة C ونسبته $\frac{CA}{CB'}$.

D صورة O' وفق تحاكٍ مركزه النقطة C ونسبته $\frac{CD}{CO'}$.

نسبة التحاكي: $\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{CA}{CB} = \frac{CA}{CB'}$

.6 $C(O,4)$ دائرة، N مُنتصف $[OA]$،

$[BD]\perp[OA]$، المماسان في النّقطتين B,D يتقاطعان في النّقطة M.



.a احسب OM.

.b عندما ترسم النّقطة A الدّائرة C فإنّ M ترسم دائرة C'،

أثبت أنّ: C' صورة C وفق تحاكٍ عيّن مركزه، واحسب نسبته.

الحل

.a في المُثلّث ONB القائم في N نجد: $ON = \frac{1}{2}OB$ أي $O\hat{B}N = 30^\circ$ فيكون $B\hat{O}N = 60^\circ$ ،

ولكن $O\hat{B}M = 90^\circ$ لأن المماس عمودي على حامل نصف القطر .

ومنه في المُثلّث OMB القائم في B، $O\widehat{M}B = 30^\circ$ إذن $OB = \frac{1}{2}OM$ أي $OM = 8$.

.b بما أنّ $\frac{OM}{OA} = 2$ نستنتج أنّ M صورة A بالتّحاكي الذي مركزه O ونسبته 2.

إذن C' صورة C وفق وفق تحاكٍ مركزه النقطة O ونسبته 2.

7. ABC مُثلّث، N منتصف $[BC]$، D نقطة من $[AN]$،

نرسم من D موازياً لـ (AB) فيقطع $[BC]$ في النّقطة E.

ومن D موازياً لـ (AC) فيقطع $[BC]$ في النّقطة F.

a. برهن أنّ F انعكاس النّقطة E نسبة إلى النّقطة N.

b. أثبت أنّ المُثلّث ABC صورة المُثلّث DEF وفق تحاكٍ عين مركزه.



الحل

a. في المُثلّث NAC لدينا $(DF) \mathbin{/\!/} (AC)$

ومنه: $\frac{NF}{NC} = \frac{ND}{NA}$ حسب تالس. وكذلك:

في المُثلّث NAB لدينا $[DE] \mathbin{/\!/} [AB]$ ومنه: $\frac{NE}{NB} = \frac{ND}{NA}$ حسب تالس. نستنتج أنّ:

$\frac{NE}{NB} = \frac{NF}{NC}$ ولكن $NB = NC$ إذن $NF = NE$ ومنه F انعكاس النّقطة E نسبة إلى النّقطة N.

b. بما أنّ: $\frac{NE}{NB} = \frac{ND}{NA} = \frac{NF}{NC}$ نستنتج أنّ النّقاط C,A,B صور النّقاط E , D , F (التّرتيب ذاته) بالتّحاكي الذي مركزه N ونسبته إحدى النّسب السّابقة، إذن المُثلّث ABC صورة المُثلّث DEF وفق التّحاكي السّابق.

8. ABC مُثلّث رؤوسه $A(5,-4)\,,B(2,-2)\,,C(5,-2)$

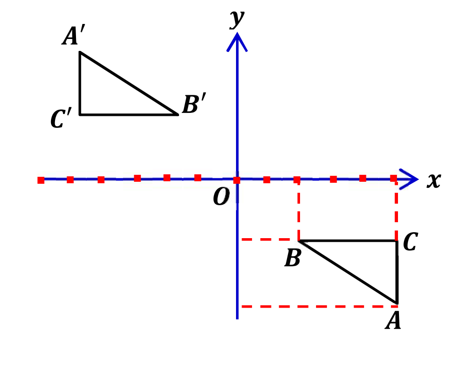
a. أوجد إحداثيي كل من رؤوس المُثلّث $A'B'C'$ صورة رؤوس المُثلّث ABC

وفق مركب انعكاسين بالنّسبة إلى محور الفواصل،

ثُمّ نسبة إلى محور التّراتيب.

b. بيّن أنّ $A'B'C'$ صورة المُثلّث ABC

وفق تحويل هندسي يُطلبُ تعيينُه.



الحل

a. صورة النّقطة A وفق الانعكاس بالنسبة إلى محور الفواصل

هي النّقطة $A_1(5,4)$

صورة النّقطة A_1 وفق الانعكاس بالنسبة إلى محور التّراتيب

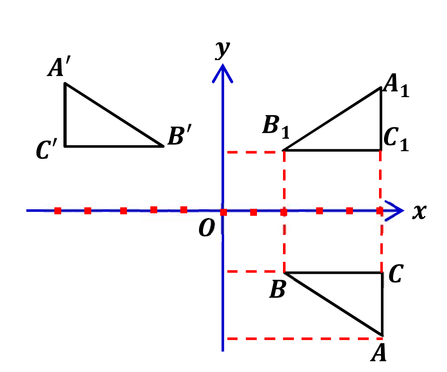
هي النّقطة $A'(-5,4)$،

إذن $A'(-5,4)$ صورة $A(5,-4)$ وفق مركب الانعكاسين السّابقين.

بالطّريقة ذاتها نجد: $B'(-2,2)$ صورة $B(2,-2)$ وفق مركب

الانعكاسين السّابقين.

$C'(-5,2)$ صورة $C(5,-2)$ وفق مركب الانعكاسين السّابقين.



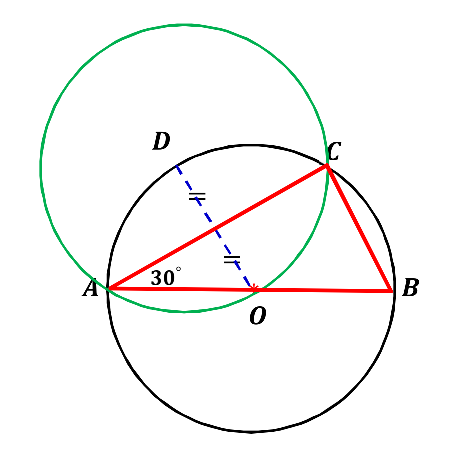
b. نعلم أن مركب انعكاسين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين هو دوران مركزه نقطة تقاطع المستقيمين وقياس زاويته ضعف قياس الزّاوية بين المستقيمين.

إذن $A'B'C'$ صورة المُثلّث ABC وفق الدّوران الذي مركزه مبدأ الإحداثيات،

وقياس زاويته $2 \times 90^{\circ} = 180^{\circ}$

أو الانعكاس بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات، وجهة دورانه بالاتجاه المباشر.

9. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً:



a. نفترض النّقطة D انعكاس النّقطة O حول (AC)،

أثبت أنّ D نقطة من الدّائرة.

b. بيّن أنّ الدّائرتين (AOC) [1], (ABC) طبوقتان،

وأنّ الدّائرة (AOC) صورة الدّائرة ABC وفق دوران مركزه النّقطة A،

عيّن زاويته واتجاهه.

الحل

a. إنّ $AO = AD$ (خاصّة المحور) ومنه $O\hat{A}C = C\hat{A}D = 30^{\circ}$ (الزّاوية طبوقة على صورتها)

إذن المُثلّث AOD متساوي الساقين، إحدى قياسات زواياه 60° فهو متساوي الأضلاع ومنه $OA = OD$

وبالتالي D نقطة من الدّائرة.

b. بما أنّ المُثلّثين ADC , AOC متطابقان، إذن الدّائرتين (ADC) , (AOC)

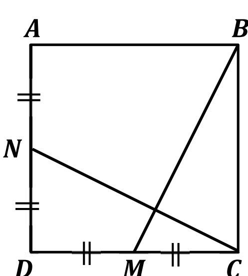
طبوقتان، ولكنّ الدّائرتين (ADC) , (ABC) طبوقتان. إذن الدّائرتان (AOC) , (ABC) طبوقتان.

إنّ النّقطة D مركز الدّائرة (AOC) لأنّ: $DA = DO = DC$.

وأنّ $O\hat{A}D = 60^{\circ}$، $AO = AD$ أي أنّ D صورة النّقطة O بالدّوران الذي مركزه النّقطة A وزاويته 60°

بالاتجاه المباشر، ومنه الدّائرة (AOC) صورة الدّائرة (ABC) وفق الدّوران السّابق.

10. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً: $ABCD$ مُربّع، M مُنتصف $[CD]$،



N مُنتصف $[AD]$. بيّن أنّ المُثلّث CBM صورة المُثلّث DCN

وفق مركب تحويلين يُطلبُ تعيينهما.

الحل

التّحويل الأوّل: انسحاب المُثلّث DCN مسافة DA وبالاتجاه من D إلى A.

التّحويل الثّاني: الدّوران الذي مركزه النّقطة B و زاويته 90° بالاتجاه المباشر.

---

[1] يدلّ الرّمز (AOC) على الدّائرة المارة برؤوس المثلث AOC.

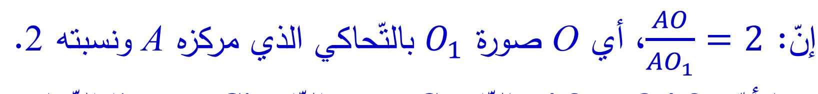
11. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً:

$C(O,OA)$ ، $C'(O_1,O_1A)$ دائرتان، O_1 منتصف $[OA]$.

أثبت أنّ الدّائرة C صورة الدّائرة C' وفق تحاكٍ، عيّن مركزه واحسب نسبته.

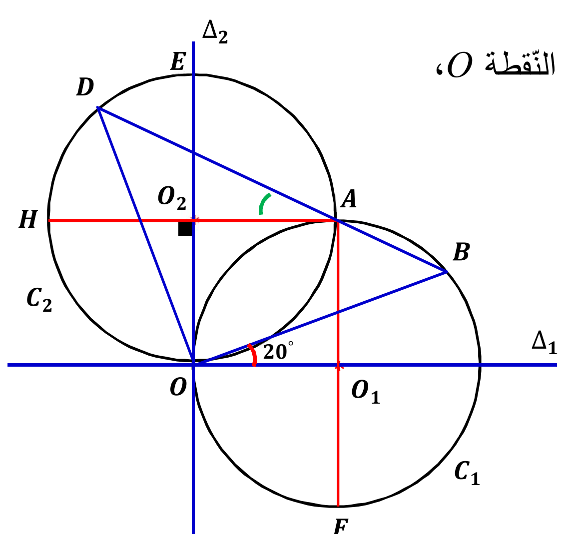


الحل:



إنّ: $\frac{AO}{AO_1}=2$، أي O صورة O_1 بالتّحاكي الذي مركزه A ونسبته 2.

وبما أنّ $AO=2AO_1$ فالدّائرة C صورة الدّائرة C' وفق هذا التّحاكي.



12. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً: Δ_1,Δ_2 مستقيمان متعامدان في النّقطة O،

C_1 دائرة مركزها النّقطة O_1 وطول نصف قطرها OO_1.

C_2 صورة الدّائرة C_1 وفق الدّوران الذي مركزه النّقطة O،

وقياس زاويته 90° بالاتجاه المباشر.

الدّائرتان C_1,C_2 تتقاطعان في النّقطتين O,A، والمطلوب:

a. أثبت أنّ: OO_1AO_2 مُربّع.

b. نفترض أنّ B نقطة من C_1 بحيث $B\hat{O}O_1=20^\circ$،

D صورة النّقطة B وفق الدّوران السّابق،

احسب قياس كلّ من $O_2\hat{A}D,O_1\hat{A}B$، واستنتج أنّ النّقاط D,A,B تقع على استقامة واحدة.

الحل

a. بما أنّ $OO_1=O_1A=AO_2=OO_2$ فالشّكل OO_1AO_2 مُعيّن، وبما أنّ $O_1\hat{O}O_2=90^\circ$

إذن OO_1AO_2 مُربّع.

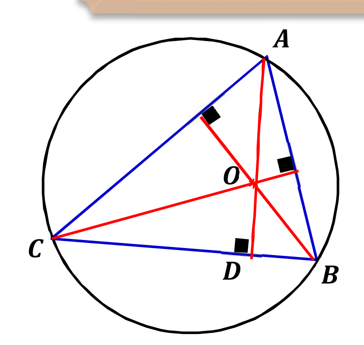
b. إنّ $O_1\hat{A}B=\frac{1}{2}\widehat{BF}$ حيث F تقاطع C_1 مع المستقيم (O_1A).

$$O_1\hat{A}B=\frac{1}{2}\widehat{BF}=\frac{1}{2}(40^\circ+90^\circ)=65^\circ$$

$$D\hat{A}O_2=D\hat{A}H=\frac{1}{2}\widehat{DE}=\frac{1}{2}(EH-ED)$$

لكن ED صورة FB وفق الدوران السابق

$\widehat{DF}=40^\circ$ إذن: $\widehat{DE}=40^\circ$ ومنه: $D\hat{A}O_2=\frac{1}{2}(90-40)=25$



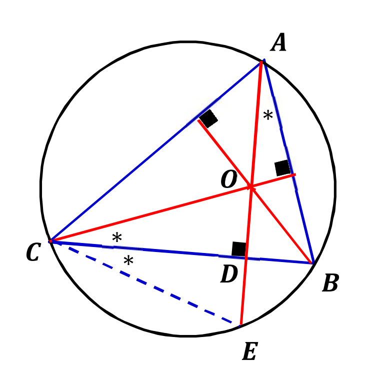
13. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً: ABC مُثلّث، O نقطة تلاقي الارتفاعات،

C_1 الدّائرة المارة برؤوسه،

أثبت أنّ انعكاس النّقطة O نسبة إلى أيّ ضلع في المُثلّث ABC

نقطة من الدّائرة C_1.

الحل:



(AO) يقطع $[CB]$ في النّقطة D ويقطع الدّائرة C_1 في النّقطة E. عندئذٍ:

$O\hat{C}B = O\hat{A}B$ بالتعامد.

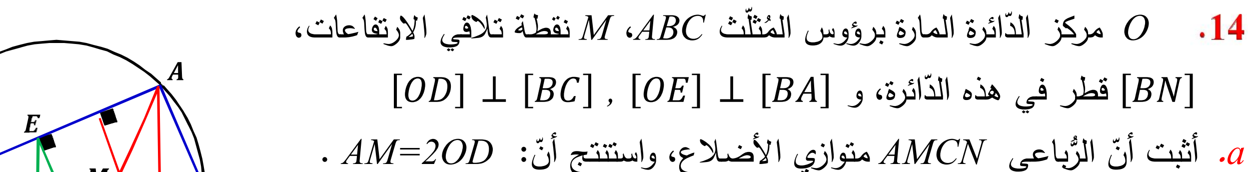
$E\hat{C}B = E\hat{A}B$ محيطيتان تشتركان بالقوس $\widehat{EB}$.

ومنه $O\hat{C}B = E\hat{C}B$، أي في المُثلّث المتساوي الساقين OCE يكون (CD)

محور القطعة $[OE]$

إذن انعكاس النّقطة O نسبة إلى الضلع $[CB]$ هي النّقطة E من الدّائرة C_1.

بالطّريقة ذاتها نُبرهن أنّ انعكاس o نسبة إلى الضّلع $[AB]$ نقطة من الدّائرة وكذلك انعكاس o نسبة إلى الضّلع $[AC]$ نقطة من الدّائرة وبذلك يتمّ المطلوب.



14. O مركز الدّائرة المارة برؤوس المُثلّث ABC، M نقطة تلاقي الارتفاعات،

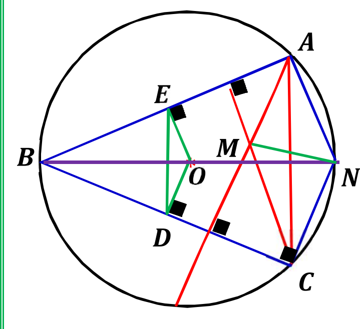
$[BN]$ قطر في هذه الدّائرة، و $[OD] \perp [BC]$, $[OE] \perp [BA]$



a. أثبت أنّ الرُّباعي $AMCN$ متوازي الأضلاع، واستنتج أنّ: $AM=2OD$.



b. أثبت أنّ المُثلّث AMC صورة المُثلّث OED وفق مركب تحويلين يطلب تعيينهما.



الحل:

a. إنّ $N\hat{C}B = 90^\circ$ (محيطية تقابل قطر في الدّائرة).

① $\cdots$ $[AM] \,/\!/\, [NC]$ (عمودان على مستقيم واحد).

بالطّريقة ذاتها نثبت أنّ ② $\cdots$ $[MC] \,/\!/\, [AN]$، نستنتج أنّ الرُّباعي $AMCN$ متوازي الأضلاع.

إنّ $AM = CN$ (من خواص متوازي الأضلاع).

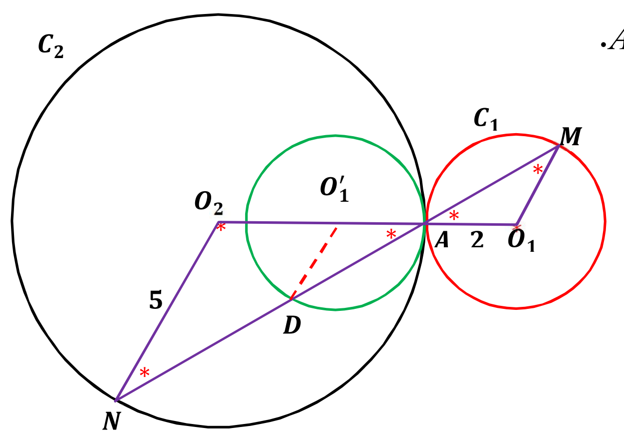
D مُنتصف $[BC]$ (مبرهنة)، O مُنتصف $[BN]$،

من ① و ② نستنتج أنّ $CN = 2OD$ ، إذن: $AM = 2OD$.

b. التّحويل الأوّل: المُثلّث ACN صورة المُثلّث OED وفق التّحاكي الذي مركزه B ونسبته 2.

التّحويل الثّاني: المُثلّث AMC صورة المُثلّث ACN بالانعكاس بالنّسبة إلى نقطة تلاقي قطري متوازي الأضلاع $AMCN$.

.15 $C_1(O_1,2), C_2(O_2,5)$ دائرتان متماستان خارجاً في A.
المستقيم المار من A يقطع الدّائرتين C_1, C_2 في النّقطتين M , N على التّرتيب.



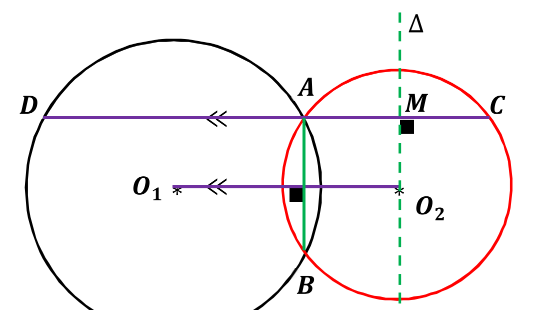
.a أثبت أنّ: $[O_1M] \mathbin{/\!/} [O_2N]$.
.b ارسم الدّائرة C'_1 صورة الدّائرة C_1 بالانعكاس في النّقطة A.
ثمّ أثبت أنّ المُثلّث AO_2N صورة المُثلّث AO_1M وفق مركب تحويلين يُطلبُ تعيينهما.

الحل:

.a إنّ: $O_1\widehat{M}A = O_2\widehat{N}A$ (علل) ﴿وهما في وضع التّبادل الدّاخلي﴾.
نستنتج أنّ: $[O_1M] \mathbin{/\!/} [O_2N]$

.b التّحويل الأوّل: الانعكاس نسبة إلى النّقطة A حيث: O'_1 انعكاس النّقطة O_1 : $(AO'_1 = 2)$
D انعكاس النّقطة M: $(AM = AD)$، والنّقطة A انعكاسها ذاتها.
التّحويل الثّاني: المُثلّث AO_2N صورة المُثلّث AO'_1D بالتّحاكي الذي مركزه A ونسبته $\frac{5}{2} = \frac{AO_2}{AO'_1}$.

.16 تأمّل الشّكل المجاور: O_1, O_2 دائرتان متقاطعتان في النّقطتين A , B ، و $O_1O_2 = 3$.



.a أثبت أنّ: (O_1O_2) محور تناظر لـ$[AB]$.
.b نرسم من A موازياً لـ (O_1O_2) فيقطع الدّائرتين O_1, O_2 في النّقطتين D , C على التّرتيب.
أثبت أنّ: B انعكاس C نسبة إلى النّقطة O_2
وأنّ D انعكاس B نسبة إلى النّقطة O_1.
واستنتج أنّ: النّقطة D صورة النّقطة C وفق تحويل هندسي يُطلب تعيينه.

الحل:

.a بما أنّ $O_2A = O_2B$ نستنتج أنّ النّقطة O_2 من محور $[AB]$.
وبما أنّ $O_1A = O_1B$ نستنتج أنّ النّقطة O_1 من محور $[AB]$.
إذن (O_1O_2) محور تناظر لـ$[AB]$.

.b A انعكاس C نسبة إلى المستقيم Δ المار من O_2 والعمود على (AC).
B انعكاس A نسبة إلى المستقيم (O_1O_2).

إذن B صورة C وفق مركب تحويلين (الانعكاسين السّابقين)

فهو دوران زاويته $180^{\circ} = 2\left(90^{\circ}\right) = 2\left(M\widehat{O_2}O_1\right)$ وهذا المركب هو الانعكاس حول النّقطة O_2.

بالطّريقة ذاتها نستنتج أنّ: D انعكاس B نسبة إلى النّقطة O_1.

D انعكاس B نسبة إلى النقطة O_1، B انعكاس C بالنّسبة إلى النقطة O_2.

ومنه: D صورة C وفق انسحاب مسافته $2O_1O_2 = 6$ وجهته من O_2 إلى O_1.

(مركب انعكاسين بالنّسبة لمركزين معلومين)

17. تأمّل الشّكل المرسوم:

$$AD = DE = EC = CB\ ,\ D\hat{E}C = 90^{\circ}\ ,\ AE = 4\ ,\ EB = 3$$

a. ارسم صورة المُثلّث CEB وفق الدّوران الذي مركزه النّقطة E وزاويته 90° بالاتجاه المباشر.

b. بفرض B' صورة النّقطة B وفق الدّوران السّابق،

أثبت أنّ النّقاط $A\ ,\ D\ ,\ B'$ تقع على استقامة واحدة،

ثُمَّ احسب مساحة الشّكل الرُّباعي $ABCD$.



a. الرسم (كما في الشكل المجاور)

b. $B\hat{C}E + E\hat{D}A = 180^{\circ}$ {علل} لأنّ مجموع زوايا المثلثين $ADE\ ,\ ECB$ يساوي 360°

لكن مجموع $\hat{1} + \hat{2} = 90^{\circ}$ ومجموع $\hat{4} + \hat{2} = 90^{\circ}$

$E\hat{D}B' = E\hat{C}B$ {علل} الزاوية طبوقة على صورتها

ومنه: $E\hat{D}B' + E\hat{D}A = 180^{\circ}$ فالنّقاط $A\ ,\ B\ ,\ B'$ تقع على استقامة واحدة.

مساحة الشّكل الرّباعي $ABCD$ = مساحة المثلث ADE + مساحة المثلث BEC + مساحة المثلث ECD

= مساحة المثلث ADE + مساحة المثلث DEB' + مساحة المثلث ECD

= مساحة المثلث AEB' + مساحة المثلث ECD

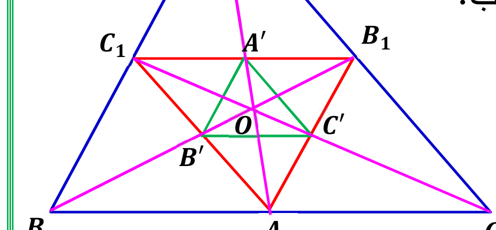
مساحة المثلث $ECD = \frac{ED\times EC}{2} = \frac{AD^2}{2}$

$[ED]$ متوسط في المثلث القائم AEB'، $ED = \frac{1}{2}AB'$ أي $ED = \frac{1}{2}(5) = \frac{5}{2}$.

ومنه مساحة المثلث $ECD = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{2} = \frac{25}{8}$

مساحة الشّكل الرباعي $ABCD = \frac{3\times 4}{2} + \frac{25}{8} = \frac{25+4\ 8}{8} = \frac{7\ 3}{8}$

18. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً:



ABC مُثلّث، O نقطة تلاقي المتوسطات.

A_1, B_1, C_1 مُنتصفات الأضلاع $[BC], [AC], [AB]$ على التّرتيب.

A', B', C' مُنتصفات الأضلاع $[B_1C_1], [A_1C_1], [A_1B_1]$ على التّرتيب.

.a أثبت أنّ النّقاط A, A', A_1, O تقع على استقامة واحدة.

.b أثبت أنّ رؤوس المُثلّث ABC صورة رؤوس المُثلّث $A'B'C'$ ،

وفق تحاكٍ عيّن مركزه ثُمَّ احسب نسبته.

الحل

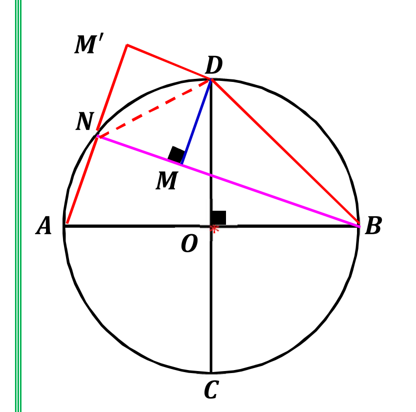
.a A' نقطة تلاقي القطرين في متوازي الأضلاع $AC_1A_1B_1$، إذن A, A', A_1 تقع على استقامة واحدة.

O نقطة تلاقي المتوسطات في المثلث $A_1B_1C_1$، إذن A_1, O, A' تقع على استقامة واحدة،

ومنه: $A\ ,\ A'\ ,\ O\ ,\ A_1$ تقع على استقامة واحدة.

.b لدينا: $\frac{OA}{OA'} = \frac{OA'+A'A}{OA'} = \frac{OA'+3OA'}{OA'} = 4$ ﴿علل﴾ وكذلك: $\frac{OC}{OC'} = 4\ , \frac{OB}{OB'} = 4$

ومنه: ABC صورة $A'B'C'$ وفق تحاكٍ مركزه النقطة O ونسبته 4.



19. $[AB], [CD]$ قُطران متعامدان في دائرة مركزها O،

$[BN]$ وتر في الدّائرة، $[DM] \perp [BN]$

.a أثبت أنّ المُثلّث MDN متساوي السّاقين.

.b ارسم صورة المُثلّث MDB بالدّوران الذي مركزه D وزاويته 90°

باتجاه دوران عقارب السّاعة، واستنتج أنّ $BM = MN + NA$.

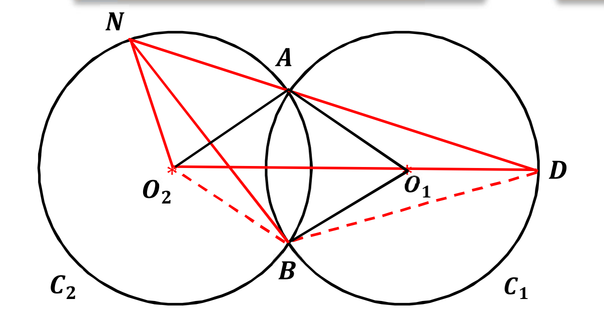
الحل

.a $D\widehat{N}B = \frac{1}{2}\widehat{BD}$ ومنه $D\widehat{N}B = 45^\circ$، فالمثلث MDN قائم الزّاوية ومتساوي السّاقين.

.b D صورتها ذاتها (لأنّها مركز الدّوران)، A صورة B ﴿علل﴾

M' صورة M ، $DMNM'$ مُربّع ﴿علل﴾

حسب الدوران السابق: $BM = AN + NM', BM = AM', BM = AN + NM$



20. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً:

C_1, C_2 دائرتان طبوقتان ومتقاطعتان في $A\ ,B$،

$O_1\hat{A}O_2 = 100^\circ$، (O_1O_2) يقطع C_1 في D،

(DA) يقطع C_2 في N.

a. أوجد قياسات زوايا المُثلّث NDB، واستنتج نوعه.

b. أثبت أنّ المُثلّث DO_1B ينتج عن المثلث BO_2N وفق دوران عيّن مركزه، واحسب قياس زاويته.

الحل

a. الشّكل الرّباعي AO_1BO_2 مُعيّن ﴿علل﴾. إذن: $A\widehat{O_2}B = 80^\circ$.

$A\hat{N}B = \frac{1}{2}A\widehat{O_2}B = 40^\circ$ ﴿علل﴾. وكذلك $A\hat{D}B = 40^\circ$ ﴿علل﴾.

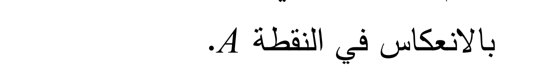
ومنه: المثلث NDB فيه $D\hat{B}N = 100^\circ$، فالمثلث NDB متساوي السّاقين.

b. إنّ: $BO_1 = BO_2$, $BD = BN$, $D\hat{B}O_1 = N\hat{B}O_2$ ﴿علل﴾.

إذن: المثلث BO_1D ينتج عن المثلث BO_2N وفق دوران مركزه النقطة B، وقياس زاويته 100° وبالاتجاه المباشر.



21. تأمّل الشّكل المرسوم جانباً: C_1, C_2 دائرتان متقاطعتان،



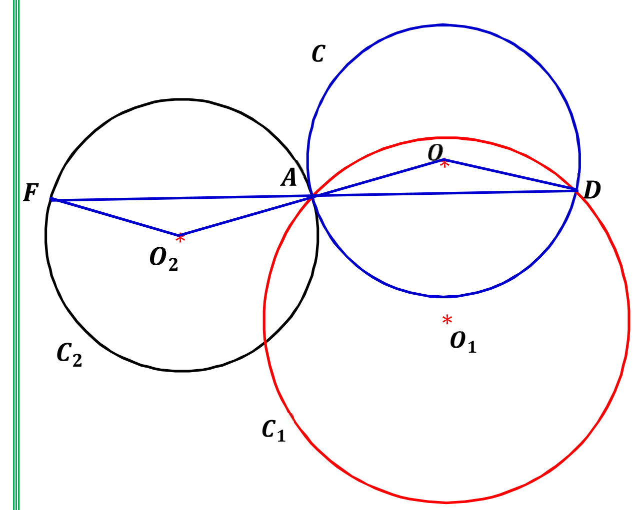
a. ارسم الدائرة C التي مركزها O صورة C_2

بالانعكاس في النقطة A.

b. الدائرة C تقطع C_1 في النقطتين A,D.

$[DA)$ يقطع الدائرة C_2 في النقطة F.

أثبت أنّ: F صورة D بالانعكاس في النقطة A.





الحل

a. نرسم O صورة O_2 بالانعكاس في النقطة A،

ثُمَّ نرسم الدّائرة C التي مركزها O وطول نصف قطرها

يساوي طول نصف قطر الدائرة C_2، فنحصل على الدّائرة C.

b. المثلث OAD صورة المثلث AFO_2 بالانعكاس في النقطة A فالمثلثان متطابقان، ومن التطابق نجد أنّ:

$AF = AD$ أي أنّ F صورة D بالانعكاس في النقطة A.

ويمكن أن نُعبِّر عن نص هذه المسألة على النحو الآتي:

أنشئ مُستقيماً يمر من A ويقطع الدّائرة C_1 في D والدّائرة C_2 في F بحيث $AF = AD$.

اختبار الوحدة الرابعة (الهندسة)

أولاً : صنافة الاختبار:

السؤال	الإجراء	السؤال	الفهم
1، 3	يُوجِد صورة نقطة وفق تحويل هندسي	1	يتعرّف صورة نقطة وفق تحويل هندسي
2 ، 4	يُوجِد صورة شكل وفق تحويل هندسي	2 ، 4	يتعرّف صورة شكل وفق تحويل هندسي
3 ، 4	يُوظِّف التّحويلات الهندسية		

ثانياً: الاختبار:

السؤال الأول: دُلّ على الإجابة الصّحيحة فيما يأتي (واحدة فقط صحيحة):

1) صورة النّقطة $M(2,-2)$ وفق الانسحاب المعرف بالقاعدة: $(x,y) \rightarrow (x+2, y-1)$

هي النّقطة: $d)\ M'(-3,4)$ $\quad c)\ M'(4,-3)$ $\quad b)\ M'(0,1)$ $\quad a)\ M'(1,0)$

2) صورة النّقطة $M'(-2,4)$ وفق التحاكي الذي مركزه النّقطة O ونسبته $\frac{1}{2}$

هي النّقطة: $d)\ M'(1,-2)$ $\quad c)\ M'(-4,8)$ $\quad b)\ M'(-1,2)$ $\quad a)\ M'(1,2)$



3) تأمل الشّكل جانباً:

$ABCD$ شكل رباعي فيه:

$CA = AB = AC$

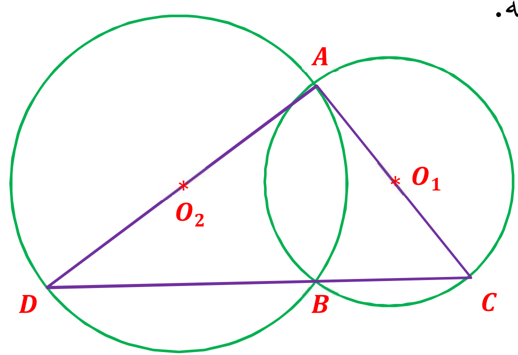
$\widehat{D} = 60^\circ$ ، $A\hat{C}B = 75^\circ$، إنّ D صورة B وفق دوران:

a. مركزه النّقطة A وزاويته 90° باتجاه دوران عقارب الساعة.

b. مركزه النّقطة A وزاويته 90° بعكس دوران عقارب الساعة.

c. مركزه النّقطة C وزاويته 90° باتجاه دوران عقارب الساعة.

d. مركزه النّقطة C وزاويته 135° بعكس دوران عقارب الساعة.



4) تأمل الشّكل جانباً:

O_1 ، O_2 دائرتان متقاطعتان في A , B . وغير طبوقتين

إنّ D صورة C وفق:

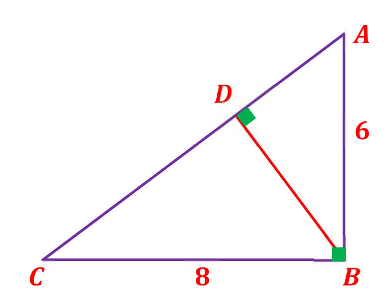
a. دوران مركزه النّقطة A وزاويته $C\hat{A}D$.

b. انعكاس بالنسبة إلى المستقيم (AB).

c. انسحاب مسافته $2\ O_1O_2$ واتجاهه من O_1 إلى O_2.

d. تحاكٍ مركزه النّقطة A ونسبته 2.

السؤال الثاني: تأمل الشّكل جانباً:



ABC مُثلّث قائم في الزاوية B، فيه $BC = 8\ ,\ AB = 6$

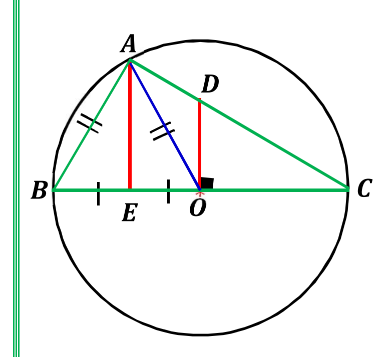
$[BD] \perp [AC]$ ،

1. ارسم صورة المُثلّث ABD وفق دوران مركزه النّقطة D وزاويته 90° باتجاه دوران عقارب الساعة.

2. أثبت أنّ المُثلّث BDC صورة المُثلّث ABD وفق مركب تحويلين (دوران يليه تحاكٍ) يُطلب تعيينهما.



السؤال الثّالث: تأمل الشّكل جانباً:



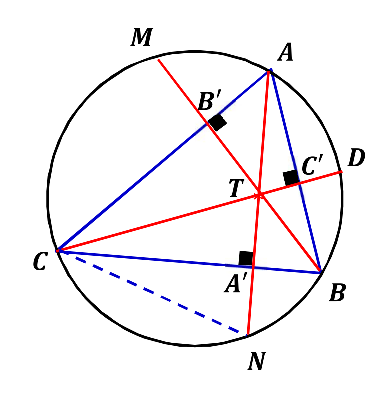
E منتصف $[OB]$ ، $(OD) \perp (BC)$ ، $OC = R\ , AO = AB$

1) بيّن أنّ المثلث OCD صورة المثلث CEA وفق تحاكٍ، عيّن مركزه ونسبته.

2) إذا كان $AE = 6$ فاحسب OD ، ثُمّ احسب R.



السؤال الرابع: تأمل الشّكل جانباً:



(ABC) الدائرة المارة برؤوس المُثلّث ABC ، T نقطة تلاقي الارتفاعات، والمطلوب:

1) أثبت أنّ المُثلّث TCN متساوي الساقين.

2) بيّن أنّ النّقطة N انعكاس النّقطة T حول المستقيم (BC).
وأنّ النّقطة D انعكاس النّقطة T حول المستقيم (BA).
وكذلك النّقطة M انعكاس النّقطة T حول المستقيم (AC).

3) أثبت أن المُثلّثين $A'B'C'\ , NMD$ متشابهان.

انتهت الأسئلة

تتمّـــــــــــات في المضــــــــــــلّعات

مُنظِّم الدّرس (3 – 1)

أهداف الدّرس

أن يتعرَّف الطالب على المحاور التناظرية لبعض المضلعات المنتظمة.

أن يّتعرف الطالب على عامد المضلع المنتظم.

المفردات والمصطلحات الجديدة

عامد المضلع المنتظم

مُستلزمات الدّرس

كتابي الطالب والأنشطة – أدوات هندسية.

ســـــــــــير الــــــــــدّرس

التّمهيـــــــــد

اطرح أسئلة أجوبتها موجودة في التذكر، واطرح الأسئلة الآتية :

ما مساحة مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a ؟ وما ارتفاعه ؟

ما علاقة بالضلع في مثلث متساوي الأضلاع بالمتوسط والمحور ؟

ماهي خاصية نقطة تلاقي المتوسطات في مثلث ؟

التّـــــــدريس

❖ وضح معطيات النشاط في الصفحة (90) ثُمَّ اطلب من المجموعات تنفيذ هذا النشاط

- اطرح التعلُّم المتعلق بهذا النشاط من خلال أسئلة وأجوبة ثُمَّ ثبِّت هذا التعلُّم على السبورة
- حُل التطبيق المتعلِّق بهذا التعلم على السبورة وبمشاركة الطلاب
- اطلب من المجموعات حل التمرين الآتي كتقويم مرحلي على هذا التعلُّم :

مثلث متساوي الأضلاع ارتفاعه $3\sqrt{2}$ والمطلوب

- احسب طول ضلعه ومساحته ومحيطه
- احسب طول عامده وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

❖ وضح معطيات النشاط في الصفحة (91) ثُمَّ اطلب من المجموعات تنفيذ هذا النشاط

- اطرح التعلُّم المتعلق بهذا النشاط من خلال أسئلة وأجوبة ثَمَّ ثبِّت هذا التعلُّم على السبورة
- اطلب من المجموعات حل التطبيق المتعلِّق بهذا النشاط كتقويم مرحلي على هذا التعلُّم

الخاتمـــة والتّقييـــم

تحقق من فهمك :

- هل لكل مضلَّع منتظم مركز ؟ وأين يقع ؟
- هل لكلِّ مضلَّعٍ منتظم مركز تناظر ؟
- في المضلعات المنتظمة التي درستها هل مركز الدائرة المارّة برؤوس المضلع المنتظم هو نفسه مركز الدائرة الماسَّة داخلاً لأضلاعه ؟



الواجب المنزلي:

- مربَّع طول نصف قطر الدائرة المارَّة برؤوسه $R = 3\sqrt{2}$

احسب طول ضلعه ومساحته وطول نصف قطر الدائرة الماسَّة لأضلاعه.



الوحدة الخامسة

المُضلّعات والمُجسّمات



محتوى الوحدة

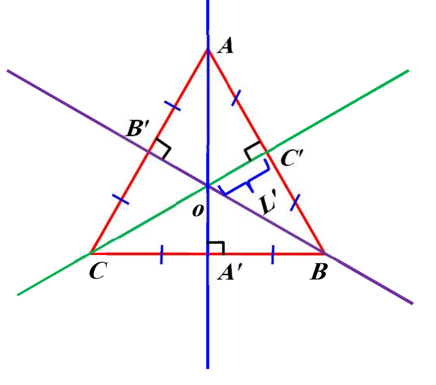
- تتمّات في المُضلّعات المُنتظمة.
- الهرم المنتظم.
- المخروط الدّوراني.

تتّصِفُ المُضلّعاتُ المنتظمةُ بصفاتٍ خاصةٍ.
تُساعدُ على رسمها وحساب مساحة سطحها ومحيطها.
ودراسةُ هذه الخواصّ مقدمة مباشرة لدراسة المُجسّمات المُنتظمة كالهرمِ المُنتظمِ والمخروط الدّورانيّ.
كلّ ذلك من خلال أمثلة تطبيقيّة ورسوم توضيحيّة مناسبة.



نشاط

ABC مُثلّث متساوي الأضلاع،
رُسِمَت محاورُ أضلاعه الثّلاثة.



- هل تمرّ محاورُ الأضلاع بالرّؤوس المقابلة لها ؟ {علّل}
- هل كلّ محور من المحاور السّابقة محورُ تناظر لهذا المُثلّث ؟ {علّل}
- لاحظ أنّ المحاورَ التّناظريّة الثّلاثة تلتقي في نقطة واحدة ؟ {علّل}
- أثبتْ أنّ $[OA'], [OB'], [OC']$ طبوقة.

نُسمِّي كلاً منها عامد المُثلّث المتساوي الأضلاع ونُرمِّز إلى طوله بـ L'.

- أثبتْ أنّ $[OA], [OB], [OC]$ طبوقة.

نُسمِّي O مركزَ المُثلّث المتساوي الأضلاع وهو مركزُ الدّائرة المارّة برؤوس هذا المُثلّث.

- إنّ $\frac{a}{2\sqrt{3}} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = OA'$ (تذكر خاصة نقطة تقاطع متوسطات المُثلّث)

تذكّر

1. المُضلّعُ المُنتظم: مُضلّع تساوت أطوالُ أضلاعه وتساوت قياساتُ زواياه.
2. محيطُ المُضلّع المُنتظم ذي n ضلعاً طول كلّ منها a يُحسبُ بالعلاقة: $P = n\,.\,a$
3. قياسُ الزّاوية الدّاخليّة لمُضلّع مُنتظم ذي n ضلعاً يُحسبُ بالعلاقة: $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$

تعلّم

للمُثلّث المُتساوي الأضلاع الذي طولُ ضلعه a:

- ثلاثةُ محاور تناظرية هي محاورُ أضلاعه.
- مركزٌ: هو نقطة تقاطع محاوره، لكنّه ليس مركزَ تناظر له.
- عامدٌ: هو العمود المُقامُ من المركز o على ضلع في المُثلّث ونُرمِّز إلى طوله بـ L' ويساوي $\frac{a}{2\sqrt{3}}$.
وهو نصف قطر الدّائرة الماسّة لأضلاع المُثلّث داخلاً.

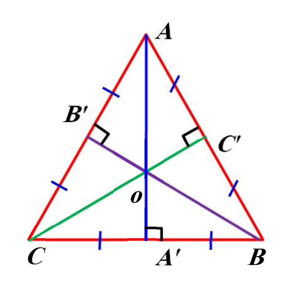
تطبيق

ABC مُثلّث متساوي الأضلاع طولُ ضلعه $2\sqrt{3}$ والمطلوب:

1- احسبْ مساحةَ المُثلّث ABC.

2- احسبْ طولَ نصف قطر الدّائرة الماسّة لأضلاع المُثلّث داخلاً.

3- احسبْ طولَ نصف قطر الدّائرة المارّة برؤوس المُثلّث.





الحل

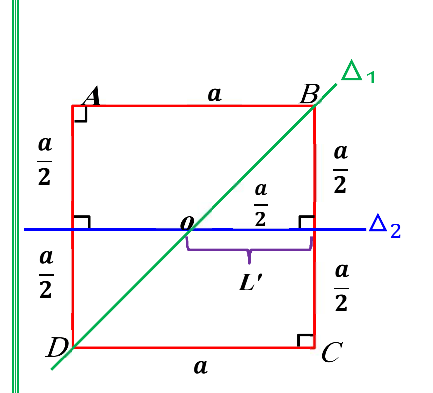
1- $S_{(ABC)} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 3\sqrt{3}$

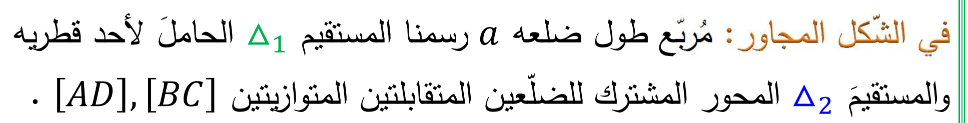
2- $r = L' = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$

3- $R = oA = 2$ ﴿علّل﴾ وهو نصف قطر الدّائرة المارّة برؤوس المُثلّث.



نشاط





في الشّكل المجاور: مُربّع طول ضلعه a رسمنا المستقيم Δ_1 الحاملَ لأحد قطريه والمستقيمَ Δ_2 المحور المشترك للضلّعين المتقابلتين المتوازيتين $[AD], [BC]$.

1- هل Δ_1 محورُ تناظر لهذا المُربّع ؟

2- هل Δ_2 محورُ تناظر لهذا المُربّع ؟

3- ارسمْ Δ_3 المستقيمَ الحاملَ للقطر الآخر للمُربّع هل Δ_3 محورُ تناظر لهذا المُربّع ؟

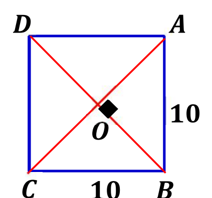
4- ارسمْ Δ_4 المستقيمَ المحورَ المشترك للضلّعين المتقابلين المتوازيتين $[DC], [AB]$،
هل Δ_4 محورُ تناظر لهذا المُربّع؟

تعلّم

للمُربّع:

- أربعةُ محاورَ تناظريّة (محورا أضلاعه المتقابلة وحاملا قطريه).
- مركزٌ هو نقطةُ تقاطع المحاور التّناظريّة وهو مركزُ تناظر المُربّع.
- $[ON]$ عامدٌ هو العمودُ المقام من مركز المُربّع على ضلع فيه ونُرمِّز طوله L' ويساوي $\frac{a}{2}$.

تطبيق



احسبْ مساحةَ مُربّع طول عامده $(L' = 5)$ واحسب طول نصف قطر الدّائرة المارّة برؤوسه.

الحل

$L' = \frac{1}{2}a$ ومنه $a = 10$ ومساحة المربع $s = a^2 = 100$

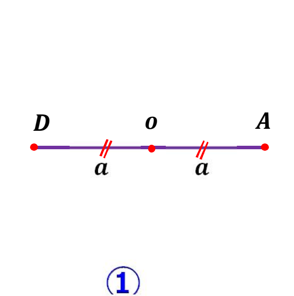
من المثلث القائم ABC نجد $AC = 10\sqrt{2}$ ونصف قطر الدائرة المارة برؤوس المربع $R = 5\sqrt{2}$

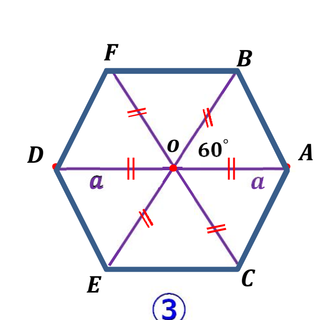
نشاط طريقةٌ لرسم مُسدّسٍ مُنتظم طول ضلعه a.

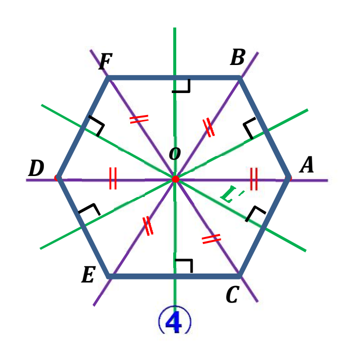
1- ارسمْ قطعةً مستقيمة $[AD]$ طولها $2a$ وحدِّد منتصفها (o).

2- ارسمْ صورتي $[AD]$ وفقَ دورانين مركزُ كلّ منهما (o) الأوّل مباشر والثّاني غير مباشر زاوية كلّ منهما 60° وسمِّهما $[BE], [CF]$ على التّرتيب.

3- صِل على التّتالي بين النّقط C, E, D, F, B, A تحصل على المُسدّس المُنتظم. {علّل}







4- نُسمِّي القطعة $[AD]$ وصورتيها السّابقتين أقطاراً للمُسدّس المُنتظم المارّة بمركز الدّوران (o).

5- أثبتْ أنّ كلّ مستقيم حامل لقطر من الأقطار السّابقة محور تناظر للمُسدّس المُنتظم السّابق.

6- $[FD], [AC]$ ضلعان متقابلتان متوازيتان في المُسدّس المُنتظم، اذكر بقية الأضلاع المتقابلة فيه.

7- في الشّكل3 المُثلّثات الستة متساوية الأضلاع وطبوقة {علّل}

8- ارسمِ المستقيم Δ_1 المحور المشترك للضلّعين المتقابلتين $[FD], [AC]$ وبيِّن أنّ Δ_1 محور تناظر للمُسدّس المُنتظم.

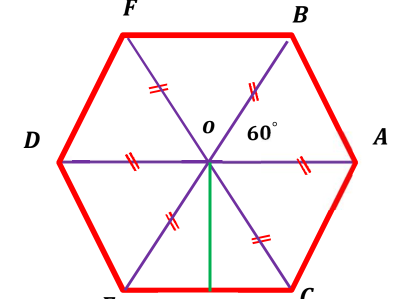
كم محور تناظر مماثل للمستقيم Δ_1 يوجد لهذا المُسدّس المُنتظم ؟ ارسمها تحصل على الشّكل4.

تعلّم

للمُسدّس المُنتظم:

- ستة محاورَ تناظريّة هي: ☝ ثلاثة مستقيمات حاملة للأقطار المارّة بمركز الدّوران (o).
  ✌ ثلاثة محاور كلّ منها محور لضلّعين متقابلتين متوازيتين فيه.
- مركزٌ هو نقطة تلاقي محاوره التناظرية وهو مركز تناظر للمسدس المنتظم.
- عامدُ المسدس المُنتظم هو العمود المقام من مركزه على أحد أضلاعه ونُرمِّز إلى طوله بـ (L').
- طولُ ضلع المسدّس المُنتظم يساوي طول نصف قطر الدّائرة المارّة بروؤسه ومركزها مركز المسدّس.

تطبيق



في الشّكل المجاور مُسدّس مُنتظم طول ضلعه 3 والمطلوب:

1- احسبْ مساحة كلّ من المُثلّثات الستة النّاتجة والمشتركة في الرّأس (o).

2- استنتجْ مما سبق مساحة المُسدّس المُنتظم النّاتج.

الحل

1- المُثلّثات الستة متساوية الأضلاع وطبوقة ومساحة كلّ منها

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 9 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

2- مساحة المُسدّس المُنتظم تساوي 6 × مساحة مُثلّث من المُثلّثات السّابقة أي:

$$S = 6 \times S_1 = 6 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{54\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

حاول أن تحلّ

مُسدّسٌ مُنتظم طول ضلعه $6\sqrt{3}$ احسب (L') طول عامده،

واحسبْ محيطه P ومساحته S واستنتجْ أنّ: $S = \frac{1}{2} P \cdot L'$.

الحل

عامد المسدس المنتظم هو ارتفاع في المثلث المتساوي الأضلاع الذي طول ضلعه يساوي

طول ضلع المسدس مثل $L'=ON$

وبالتالي $L' = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6\sqrt{3} = 9$

$$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\left(6\sqrt{3}\right)^2 = 162\sqrt{3}$$

$$p = 6 \times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

ومنه $\frac{1}{2}pL' = \frac{1}{2}\left(36\sqrt{3}\right)(9) = 162\sqrt{3} = S$

نقبلُ أنّ $S = \frac{1}{2}P \cdot L'$ قاعدةٌ تُعمّم لحساب مساحة أيّ مُضلّع مُنتظم بدلالة محيطه P وطول عامده (L')



5 - 2 الهـــــــــــــرم المنـــــــــــــتظم

سوف تتعلّم

- شبكة السّطوح لهرم مُنتظم وصنعه.
- الهرم المُنتظم.
- مساحة الهرم المُنتظم وحجمه.

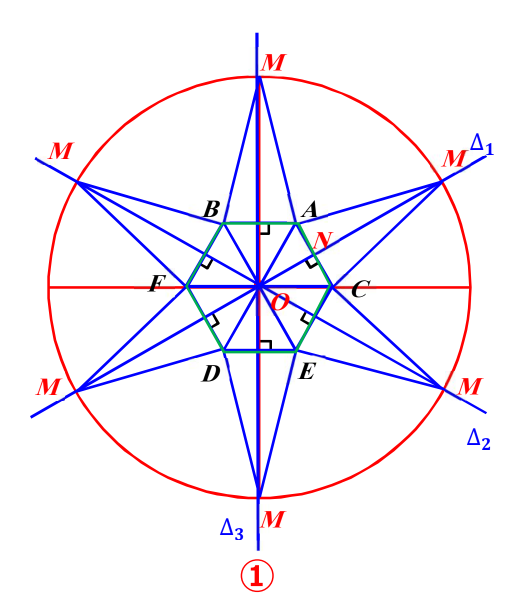


نشاط ①

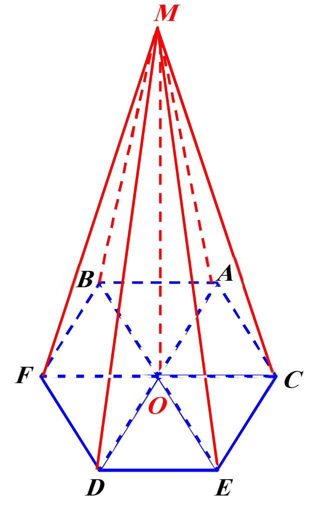
- ارسمْ مُسدّساً مُنتظماً $ABFDEC$ طول ضلعه a.
- ارسمْ محاوره التّناظريّة لكلّ ضلعين متقابلتين فيه ولتكن $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.
- حددْ عامده $[ON]$ الذي طوله L'.
- ارسمْ دائرة مركزها (O) مركز المُسدّس المُنتظم وطول نصف قطرها R' حيث $(R' > 2L')$.
- سمِّ M نقطة تقاطع الدّائرة مع كلّ من المحاور $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.
- صِلْ بين طرفي كلّ ضلع من المُسدّس المُنتظم ونقطة تقاطع محور هذه الضلع مع الدّائرة.
- كمْ مُثلّثاً خارج المُسدّس المُنتظم ينتج لديك ؟

  ما نوع كلّ من هذه المُثلّثات ؟

  هل هذه المُثلّثات طبوقة ؟
- قصّ الشّكل وفق ساق كل مُثلّث خارجي وبطوله تحصل على شبكة السّطوح.
- قمْ بطي شبكة السّطوح عند أضلاع المُسدّس المُنتظم حتى تنطبق النّقط M على بعضها بعضاً، تحصل على هرم سداسي مُنتظم نُرمِّز إليه بـ $M - ABFDEC$.
- الهرم المُنتظم وما داخله يسمّى مُجسّماً هرمياً مُنتظماً.



①



③
هرم سداسيّ مُنتظم

②
شبكة السّطوح لهرم سداسيّ مُنتظم



وصف وتسميات في الهرم المُنتظم

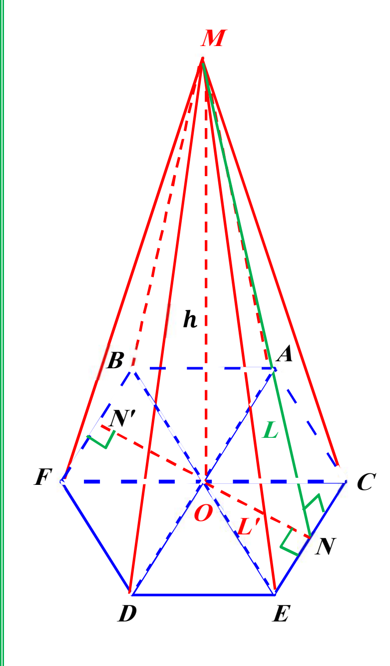
انظرْ الهرم السّداسيّ المُنتظم المرسوم جانباً نُسمّي:

- المُسدّس المُنتظم $ABFDEC$ قاعدة الهرم المُنتظم، والنّقطة M رأس الهرم.
- كلّ مُثلّث متساوي السّاقين مُنشأ على ضلع من القاعدة ورأسه M وجهاً جانبياً للهرم المُنتظم (توجد ستة وجوه جانبية طبوقة).
- $[ON]$ عامدُ قاعدة الهرم المُنتظم ونُرمّز إلى طوله بـ L' .
- $[MN]$ عامدُ الهرم المُنتظم (وهو ارتفاع لوجه جانبي) ونُرمّز طوله L .
- $[MA], [MB], [MF], [MD], [ME], [MC]$ أحرف جانبية للهرم المُنتظم (وهي طبوقة) ونُرمّز إلى طول أي منها بـ L_1.

  $[MO]$ ارتفاعُ الهرم المُنتظم ونُرمّز إلى طوله بـ h.

  ($[MO]$ عمود على أقطار القاعدة المارّة بـ O وعلى $[NN']$) ﴿علّل﴾
- الهرمُ المُنتظم ثلاثيّاً أو رباعيّاً أو سداسيّاً ... حسب عدد أضلاع قاعدته.

ينتجُ ممّا سبقَ أنّ $L^2 = L'^2 + h^2$. ﴿علّل﴾



تعلّم

- طريقة إنشاء شبكة السّطوح لهرم مُنتظم.

1. نرسمُ قاعدة الهرم المنتظم، ثُمَّ نرسم محاور أضلاعها.
2. نرسمُ دائرة $C(O, R')$ حيث $R' > 2L'$ فتقطعُ المحاورَ السّابقة في النّقط M.
3. نصلُ بين كلّ نقطة M وطرفي ضلع القاعدة التي M من محورها.
4. نقصُّ الشّكل وفقَ ساق كلّ مُثلّث خارجي وبطوله.

- طريقةُ صُنع الهرم المُنتظم.

1. نَطوي المُثلّثات النّاتجة عند أضلاع القاعدة حتى تنطبق النّقط M على بعضها.
2. في الهرم المُنتظم تتحقّق العلاقتان: $L^2 = L'^2 + h^2$ ② $R' = L' + L$ ①

تذكّر

في الرّسم الفراغي لمُجسّم نرسمُ الخطوط التي لا نراها مباشرة بشكل مُنقّط.

تفكيرٌ ناقد

بعد أنْ درس تمّام الهرم المُنتظم وتسمياتِه توصّل إلى:

1. $L_1^2 = R^2 + h^2$ حيثُ R طولُ نصف قطر الدّائرة المارّة برؤوس قاعدة الهرم المُنتظم.
2. $L_1^2 = L^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ حيثُ a طولُ ضلع قاعدة الهرم المُنتظم.

ناقش ما توصّل إليه تمّام مع التعليل.

عمل تعاوني

ارسم شبكة السّطوح لهرم رباعي مُنتظم طول ضلع قاعدته 6 وطول عامده 5.
ثُمَّ اصنع هذا الهرم (مستعيناً بشريط لاصق) وارسمْ هذا الهرم فراغيّاً.

واجب منزلي

1. ارسمْ شبكةَ السّطوح لهرم ثلاثي مُنتظم طولُ ضلع قاعدته 5 وطولُ عامده 5.
ثُمَّ اصنعْ هذا الهرم، وارسمْ هذا الهرم فراغيّاً، وضع المُسمّيّات عليه وعلى شبكة السّطوح.
2. هرمٌ مُنتظم فيه $L = 10 , h = 6$، احسبْ L'.

الحل

(1

a. نرسم قاعدة الهرم الثلاثي المنتظم وهي مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 5 ثُمَّ نرسم محاور أضلاعه $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ والتي تتقاطع في النقطة (O)

b. نرسم الدائرة $C(O, R')$ حيث $R' = L + L'$ هذه الدائرة تقطع المحاور في النقط M

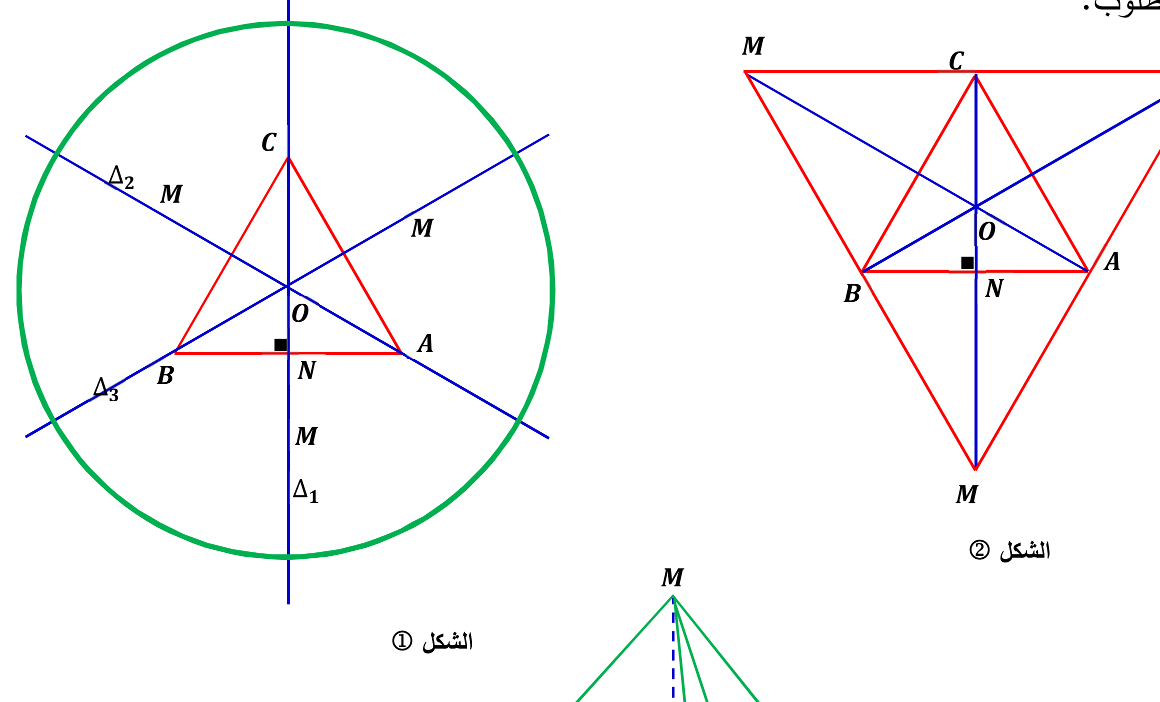
$(L'$ عامد المثلث المتساوي الأضلاع و $L' = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6})$

c. نصل بين كل نقطة M وطرفي ضلع القاعدة التي M من محورها

d. نقص الشكل وفق ساق كل مثلث خارجي وبطوله

e. نطوي المثلثات الثلاثة السابقة الناتجة عند أضلاع القاعدة حتى تنطبق النقط M على بعضها نحصل على الهرم المطلوب.

f.



الشكل ①

الشكل ②

الشكل ③

2) بما أنَّ $L^2 = h^2 + L'^2$ ومنه $L'^2 = 64$ ومنه $\ell' = 8$

نشاط 2

مساحة المُجسّم الهرمي المُنتظم وحجمه

مُجسّم هرميّ مُنتظم عامده L وعامد قاعدته L' وارتفاعه h والمطلوب:

- احسبْ مساحة قاعدته.
- احسبْ مساحة أحد المُثلّثات الجانبيّة الطبوقة ثُمَّ اضرب الناتج بعدد هذه المُثلّثات.
- استنتجِ المساحة الجانبيّة S_ℓ لهذا المُجسّم بدلالة محيط قاعدته P وطول عامده L.
- اجمعْ مساحة قاعدته S_b ومساحته الجانبيّة S_ℓ.
- استنتجْ المساحة الكلّيّة S_T للمُجسّم الهرمي المُنتظم.



- مساحةُ قاعدة الهرم المُنتظم: $S_b = \frac{1}{2}P.L'$
- المساحةُ الجانبيّة للهرم المُنتظم تساوي ($\frac{1}{2}$ × محيط القاعدة × عامد الهرم) أي: $S_\ell = \frac{1}{2}P.L$
- المساحةُ الكليّة للهرم المُنتظم تساوي (مساحة القاعدة + المساحة الجانبيّة) أي: $S_T = S_b + S_\ell$

واختصاراً: $S_T = \frac{1}{2}P(L + L')$

- نقبلُ أنّ حجم الجسم الهرمي المنتظم يساوي ($\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع) أي: $V = \frac{1}{3}S_b.h$

تطبيق

مُجسّم هرمي ثلاثي مُنتظم طولُ ضلع قاعدته $4\sqrt{3}$ وطولُ عامده 6 والمطلوب:

1- أثبتِ أنّ $L' = 2$.

2- احسبِ المساحةَ الكلّيّة للهرم.

3- احسبِ حجمَ الهرم.

تذكّر

ارتفاع المُثلّث المتساوي الأضلاع الذي طولُ ضلعه a يساوي: $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$

الحل

1- المساحةُ الكلّيّةُ للهرم

$$S_T = \frac{1}{2}P(L + L')$$

نحسبُ P $P = 3 \times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

$L' = r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 2 \quad , \quad L = 6$

نُعوِّض فنجد: $S_T = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{3} \times (6 + 2) = 48\sqrt{3}$

2- حجمُ المُجسّم الهرمي

$V = \frac{1}{3} S_b . h$

نحسبُ S_b : $S_b = \frac{1}{2} P . L' = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{3} \times 2 = 12\sqrt{3}$

نحسبُ h : $h^2 = L^2 - L'^2$

$h^2 = 36 - 4 = 32$

ومنه $h = 4\sqrt{2}$

نُعوِّض فنجد: $V = \frac{1}{3} \times 12\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} = 16\sqrt{6}$

حاول أن تحلّ

احسبِ المساحةَ الكلّيّة والحجم لمُجسّم هرمي رباعيّ مُنتظم طول ضلع قاعدته 6 وعامده 10.

الحل

قاعدة الهرم الرباعي المنتظم مربع طول ضلعه $a = 6$ وعامد القاعدة $L' = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ و $L^2 = h^2 + L'^2$

ومنه $h = \sqrt{91}$، محيط المربع : $p = 4 \times 6 = 24$

$S_t = \frac{1}{2} P(L + L')$ ومنه $S_t = \frac{1}{2}(24)(10 + 3) = 156$ و $S_b = a^2 = 36$

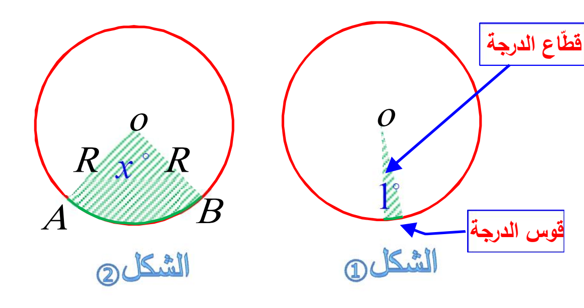
$v = \frac{1}{3} S_b . h = \frac{1}{3} \times 36 \times \sqrt{91} = 12\sqrt{91}$

3 - 5 المخروط الدّوراني

سوف تتعلّم

- المخروط الدّوراني.
- صنع المخروط الدّوراني.
- حساب مساحة المخروط الدّوراني وحجمه.

نشاط ①



في الشّكل①: قطاع دائري مركزي زاويته 1°.

في الشّكل②: قطاع دائري مركزي زاويته x°.

- $A\hat{o}B$ زاوية مركزيّة قياسها x° وتُحدّد على الدّائرة قوساً $\overset{\frown}{AB}$ قياسها x° .

إنّ هذه الزّاوية وقوسها $\overset{\frown}{AB}$ تُحدّدان من القرص الدّائري قطاعاً دائريّاً مركزيّاً (الجزء الملون في الشّكل②).

- إذا رمَزْنا إلى طول القوس $\overset{\frown}{AB}$ بـ ℓ وإلى مساحة القطاع الدّائري بـ S فكيف نحسبُ ℓ و S ؟

للإجابة: تمعّن في الجدول الآتي ثُمّ املأ الفراغاتِ بما يناسبها:

قياسُ القوس x°	طولُ القوس ℓ	مساحةُ القطاع الدّائري المركزي الموافق S
360°	$2\pi R$	πR^2
1°	....	....

تجدُ أنّ: طولَ القوس الدّرجة ℓ_1 (المقابلة لـ 1°) هو: $\ell_1 = \dfrac{2\pi R}{360^\circ}$

مساحةُ القطاع الدّائري الدّرجة S_1 (الذي تُحدّده زاوية مركزيّة وقياسها 1°) هي: $S_1 = \dfrac{\pi R^2}{360^\circ}$

- ما طولُ قوس من الدّائرة $C(O,R)$ قياسه x° ؟
- ما مساحةُ القطاع الدّائري المركزي الذي تُحدّده قوس قياسها x° من قرص دائري $C(O,R)$ ؟

تعلّم

في القرص الدّائري $C(O,R)$:

- طولُ القوس الذي قياس قوسه x° هو: $\ell = \ell_1 . x^{\circ}$ أي: $\ell = \dfrac{2\pi R . x^{\circ}}{360^{\circ}}$.
- مساحةُ القطّاع الدّائري المركزي الذي قياس قوسه x° هو: $S = S_1 . x^{\circ}$ أي: $S = \dfrac{\pi R^2 . x^{\circ}}{360^{\circ}}$.

ملاحظة

- نقبلُ حسابَ كلّ من ℓ و S بدلالة π.
- لرسمِ قوسٍ طوله ℓ من دائرة: نرسمُ الزّاوية المركزيّة المقابلة له فيكون طول القوس بين ضلعيها مساوياً ℓ.

تطبيق

$\overset{\frown}{FG}$ قوسٌ من الدّائرة $C(0,9)$ قياسه 120°، احسبْ طولَ ℓ ومساحة القطاع الدّائري الذي قوسه $\overset{\frown}{FG}$.

الحل

$$\ell = \frac{2\pi R . x^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{2\pi \times 9 \times 120^{\circ}}{360^{\circ}} = 6\pi$$

وبالتالي

$$S = \frac{\pi R^2 . x^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{\pi \times 81 \times 120^{\circ}}{360^{\circ}} = 27\pi$$

حاول أن تحلّ

1- احسبْ طولَ قوس من الدّائرة $C(0,12)$ قياسه 90°.

2- $\overset{\frown}{AB}$ قوس من الدّائرة $C(0,4)$ طوله 6π والمطلوب:

a) ارسم الدّائرةَ ثُمَّ حدّد $\overset{\frown}{AB}$ عليها.

b) احسب مساحةَ القطاع الدّائري المركزي الذي قوسه $\overset{\frown}{AB}$.

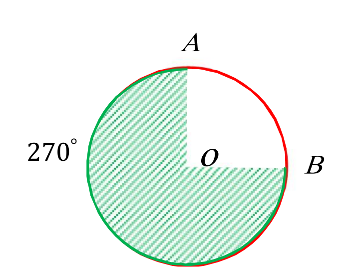
الحل

1) $\ell = \dfrac{2\pi R X^{\circ}}{360^{\circ}} = \dfrac{2\pi(12)(90^{\circ})}{360^{\circ}} = 6\pi$

2) a) $6\pi = \dfrac{2\pi(4)(X^{\circ})}{360^{\circ}}$ ومنه $X^{\circ} = \dfrac{3}{4}(360^{\circ}) = 270^{\circ}$

وهو قياس القوس AB ولرسمه نرسم زاوية مركزية قياسها 270°

وهي الزاوية المنعكسة $A\hat{O}B$ كما في الشكل المجاور



b) $S = \dfrac{\pi R^2 X^{\circ}}{360^{\circ}} = \dfrac{3}{4}\pi(16) = 12\pi$

نتيجة:

حسابُ مساحة قطاعٍ دائري بدلالة طول قوسه ℓ وطول نصف قطر دائرته R : " البرهان للاطلاع "

من قانون طول القوس $\ell = \frac{2\pi R . x^{\circ}}{360^{\circ}}$ نوجد قياس القوس.

$x^{\circ} = \frac{360^{\circ} \cdot \ell}{2\pi R}$ نُعوّض في قانون المساحة

$$S = \frac{\pi R^2 \cdot x^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{\pi R^2 \times \frac{360^{\circ} \cdot \ell}{2\pi R}}{360^{\circ}} = \frac{\frac{\pi R^2}{2\pi R} \times 360^{\circ} \cdot \ell}{360^{\circ}} = \frac{\pi R^2}{2\pi R} \times \frac{360^{\circ} \cdot \ell}{360^{\circ}} = \frac{1}{2} R \cdot \ell$$

تعلّم

مساحة قطّاع دائري مركزي بدلالة طول قوسه ℓ من قرص دائري $C(O,R)$ يساوي

($\frac{1}{2}$ × طول نصف قطر الدائرة × طول القوس) أي: $S = \frac{1}{2} R \cdot \ell$

تطبيق

$\overset{\frown}{FD}$ قوس من الدّائرة $C(0,7)$ طوله $\ell = \frac{7}{2}\pi$ ،

احسبْ مساحة القطاع الدّائري المركزي الذي يُحدّده هذا القوس.

الحل

$$S = \frac{1}{2} R \cdot \ell = \frac{1}{2} \times 7 \times \frac{7}{2}\pi = \frac{49}{4}\pi$$

حاول أن تحلّ

احسبْ مساحةَ القطاع الدّائري المركزي الذي يحدّده قوس قياسه 90° من القرص $C(0,8)$.

الحل

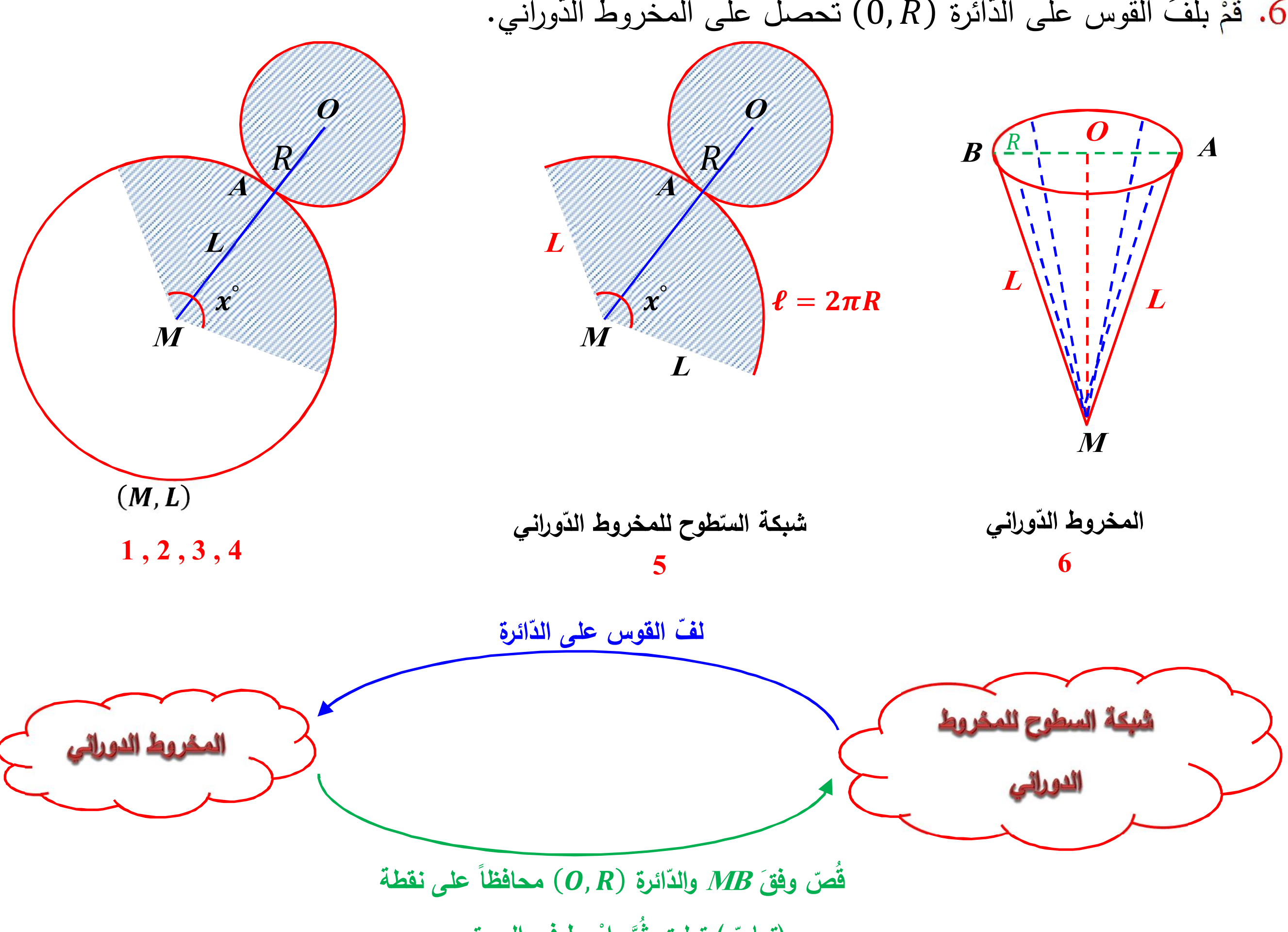
$$\ell = \frac{2\pi R X^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{2\pi(8)(90^{\circ})}{360^{\circ}} = 4\pi$$

$$S = \frac{1}{2}(8)(4\pi) = 16\pi$$

نشاط②

صنع المخروط الدّوراني:

1. ارسمِ الدّائرة (M,L) وحدّد عليها نقطة اختيارية A.
2. ارسمِ الدّائرة (O,R) التي تمسّ الدّائرة السّابقة خارجاً في A بشرط $(R < L)$
3. حدّدِ على الدّائرة (M,L) قوساً طوله يساوي محيط الدّائرة (O,R) بحيث A نقطة من هذا القوس.
4. لوِّنْ قرص الدّائرة (O,R) والقطاع الدّائري المركزي الذي حدّدته على قرص الدّائرة (M,L).
5. قصّ المنطقة الملونة السّابقة محافظاً على نقطة التماس (الاتصال) A فيها،
   تحصلُ على: شبكة السّطوح لمخروط دوراني.
6. قمْ بلفِّ القوس على الدّائرة (O,R) تحصل على المخروط الدّوراني.



7. وصف وتسمية المخروط

نُسمِّي:

- القرص الدّائري (O, R) قاعدة المخروط نُرمِّز إلى مساحته بـ S_b.
- $[MA], [MB]$ عامدُ (مولد) المخروط الدّوراني وطوله L.
- $[MO]$ ارتفاعُ المخروط الدّوراني ونُرمِّز إلى طوله بـ h وهو عمود على قطر الدّائرة في O. ﴿علل من المُثلّث MAB ﴾
- سطح القطاع الدّائري في الشبكة هو السطح الجانبي للمخروط ونُرمِّز إلى مساحته بـ S_b.
- نُسمِّي المخروط الدّوراني وما داخله مُجسّم المخروط.

تطبيق

ارسمْ شبكة السّطوح لمخروط دوراني طولُ نصف قطر قاعدته $2\ cm$، وطولُ مولده $5\ cm$.

الحل

a. نرسم الدائرة $(M, 5)$ ونحدد عليها النقطة A

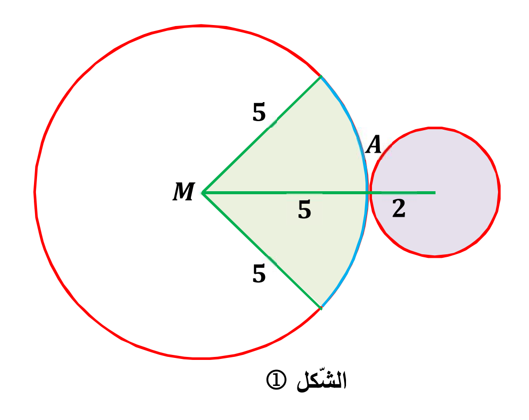
b. نرسم الدائرة $(0,2)$ المماسة خارجاً للدائرة $(M, 5)$ في A

إنَّ محيط الدائرة $(0,2)$ هو $2\pi \times 2 = 4\pi$

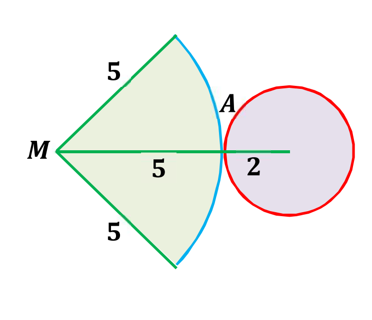
c. نحدد على الدائرة $(M, 5)$ قوس طوله 4π على أن تنتمي النقطة A له كما في الشكل①.

d. نُلوِّن القطاع المركزي الذي يحدده القوس الذي طوله 4π من الدائرة $(M, 5)$ ونُلوِّن الدائرة $(0,2)$

e. نقُص المنطقة الملونة نحصل على الشبكة المطلوبة كما في الشكل②.

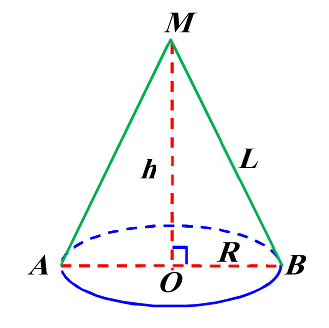


الشّكل ①



الشّكل ②

نشاط④ مساحة المخروط الدّوراني وحجمه:



مُجسّم مخروط دوراني طولُ نصف قطر قاعدته R وطولُ عامده (مولده) L وارتفاعه h.

1. ما مساحةُ قاعدته ؟ وبيِّن أنّ مساحته الكلّيّة تساوي $\pi\ R\ L$.
2. استنتجْ مساحته الكلّيّة.

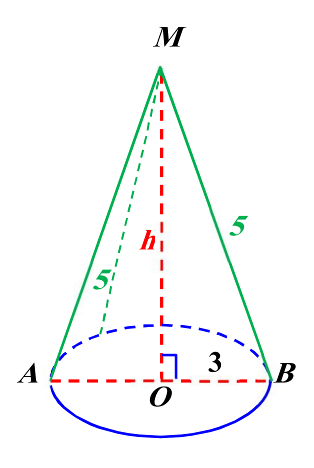
تعلّم

- المساحةُ الجانبيّة للمخروط الدّوراني = نصف محيط قاعدته × طول عامده. أي: $S_\ell = \pi\ R\ L$.
- المساحةُ الكليّة للمخروط الدّوراني = مساحة قاعدته + المساحة الجانبيّة. أي: $S_T = \pi\ R^2 + \pi R\ L$.

  واختصاراً: $S_T = \pi\ R\ (R + L)$

- نقبلُ أنّ حجمَ مُجسّم المخروط الدّوراني = $\frac{1}{3}$ × مساحة قاعدته × طول ارتفاعه. أي: $V = \frac{1}{3}\pi\ R^2\ h$.

تطبيق



الشّكل المرسوم جانباً: رسمٌ فراغي لمُجسّم مخروط دوراني طولُ نصف قطر قاعدته 3

وطولُ مولده 5، احسب مساحته الجانبيّة ثُمّ الكلّيّة واحسبْ حجمه.

الحل حسبَ الفرض لدينا: $R = 3\,, L = 5$

$$S_\ell = \pi\ R\ /= \pi \times 3 \times 5 = 15\pi$$

$$S_T = \pi\ R(R + L) = \pi \times 3 \times (3 + 5) = 24\pi$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\ R^2 \cdot h$$

نحسبُ h حسبَ مُبرهنة فيثاغورث من المُثلّث القائم MOA

$h^2 = L^2 - R^2 = 25 - 9 = 16$ ومنه $h = \sqrt{16} = 4$

نُعوِّض في قانون الحجم نجد: $V = \frac{1}{3}\pi \times 9 \times 4 = 12\pi$

حاول أن تحلّ

مُجسّم مخروط دوراني قاعدته القرص $C(0,8)$ وارتفاعه 6.

احسبْ مساحته الجانبيّة ثُمّ الكلّيّة واحسبْ حجمه.

الحل

لدينا $L^2 = h^2 + R^2$ ومنه $\ell = 10$

$$S_\ell = \pi RL = \pi \times 8 \times 10 = 80\pi$$

$$S_t = \pi R(R+L) = \pi \times 8(8+10) = 144\pi$$

$$v = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 64 \times 6 = 128\pi$$



تمريناتُ الوحدة

1. احسبْ مساحة كلّ من المُضلّعات المُنتظمة الآتية:

a. مُثلّث متساوي الأضلاع طول عامده: $L' = 3\sqrt{3}$.

b. مُربّع طولُ نصف قطر الدّائرة المارّة برؤوسه: $R = 3\sqrt{2}$.

c. مُسدّسٌ مُنتظمٌ محيطه: $P = 48$.

الحل

a. $L' = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ ومنه $3\sqrt{3} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ ومنه $a = 18$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(18)^2 = 81\sqrt{3}$$

b. $(2R)^2 = a^2 + a^2$ ومنه $\left(6\sqrt{2}\right)^2 = 2a^2$ إذاً $36 = a^2$ و $a = 6$ ومنه $S = a^2 = 36$

c. $P = 48$ ومنه $a = \frac{48}{6} = 8$ إذاً $S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3}{2}\sqrt{3}(8)^2 = 96\sqrt{3}$

2. شبكةُ سطوح لهرم مُنتظم فيها $L = 5\sqrt{3}\ ,\ L' = 3\sqrt{3}\ ,\ P = 36$، احسب:

a. المساحةَ الكلّيّة للهرم المُنتظم.

b. حجمَ مُجسّم الهرم المُنتظم.

الحل

a. $S_t = \frac{1}{2}p(L + L') = \frac{1}{2} \times 36\left(5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\right) = 144\sqrt{3}$

b. $S_b = \frac{1}{2}PL' = \frac{1}{2} \times 36 \times 3\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$

$h^2 = L^2 - L'^2 = 75 - 27 = 48$ ومنه $h = 4\sqrt{3}$

$$v = \frac{1}{3} \times 54\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 216$$

3. مخروطٌ دوراني قاعدته القرص الدّائري $C(O,6)$ وطول ارتفاعه 8 ، احسب:

a. المساحة الكلّيّة له.

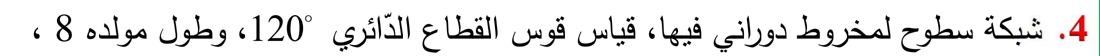
b. حجم مُجسّم المخروط الدّوراني.

الحل

a. $L^2 = h^2 + R^2 = 100$ ومنه $L = 10$

$S_t = \pi R(L+R) = \pi \times 6(10+6) = 96\pi$

.b $v = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 36 \times 8 = 96\pi$



.4 شبكة سطوح لمخروط دوراني فيها، قياس قوس القطاع الدّائري 120°، وطول مولده 8 ،

احسب:

.a المساحة الكلّيّة له.

.b حجم مُجسّم المخروط الدّوراني.

الحل

.a طول القوس الذي قياسه 120° هو: $\ell = \frac{2\pi R X^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi\times 8\times 120^\circ}{360^\circ} = \frac{16}{3}\pi$

$\ell = 2\pi R$ ومنه $\frac{2\pi R}{1} = \frac{16\pi}{3}$ و $R = \frac{8}{3}$

$L = 8$ ومنه $\frac{512}{9} = \frac{576-64}{9} = h^2 = L^2 - R^2 = 64 - \frac{64}{9}$ ومنه $h = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

$S_t = \pi R(R+L) = \pi\left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{8}{3}+8\right) = \pi\left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{32}{3}\right) = \frac{256}{9}\pi$

.b $v = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{64}{9}\right)\left(\frac{16\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1024}{81}\sqrt{2}\pi$



الوحـــــــدة الخامســـــــة

المضـــلعات والمجســمات

الدّرس (1 − 5)

1. احسب مساحة المسدس المنتظم في كلٍّ من الحالات الآتية:

a) طول ضلعه $a = 8\sqrt{3}$

b) طول نصف قطر الدائرة الماسة لأضلاعه داخلاً $r = 2$

c) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه: $R = 4$

الحل

a) $S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3}{2}\sqrt{3}(8\sqrt{3})^2 = 288\sqrt{3}$

b) $r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ومنه $2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ إذن $a = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{3}{2}\sqrt{3} \times \frac{16}{3} = 8\sqrt{3}$

c) $R = a = 4$ ومنه $S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 16 = 24\sqrt{3}$

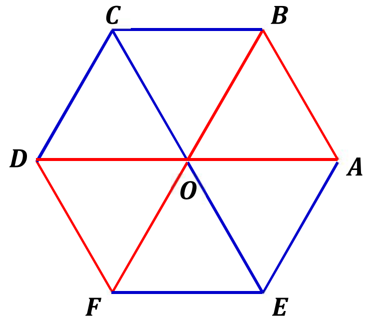
2. OAB مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $5\sqrt{3}$ و ODF صورته وفق انعكاس في O.

a) ارسم صورة الشّكل الناتج وفق دوران مركزه O وزاويته 60° وبالاتجاه المباشر.

b) ارسم صورة الشّكل الناتج وفق دوران مركزه O وزاويته 60° وبالاتجاه غير المباشر.

c) سمِّ المضلع الناتج من الشّكل وصورتيه السابقتين ثمَّ احسب مساحته.

الحل



a) الرسم المجاور

b) الرسم المجاور

c) المضلع الناتج مسدس منتظم $ABCDFE$

$$S = 6 \times S(OAB) = 6 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6 \times \frac{25(3)\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{225\sqrt{3}}{2}$$

3. احسب مساحة المثلث المتساوي الأضلاع في كلٍّ من الحالات الآتية:

a) طول ضلعه 4

b) طول ارتفاعه $\sqrt{3}$.

c) طول عامده $7\sqrt{3}$.

الحل

$(a$ $S = a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

$(b$ $S = \sqrt{3}$, $a = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$, $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times a$

$(c$ $S = (42)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 441\sqrt{3}$, $a = 42$, $a = 7\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$, $\ell' = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

4. في الشّكل المجاور مُربّع $ABCD$ داخله دائرة تمس أضلاعه.

احسب مساحة المنطقة الملونة.



$OB = 8, OM^2 + MB^2 = OB^2, 2MO^2 = 64$

$OM^2 = 32, OM = 4\sqrt{2}, AB = 8\sqrt{2}$

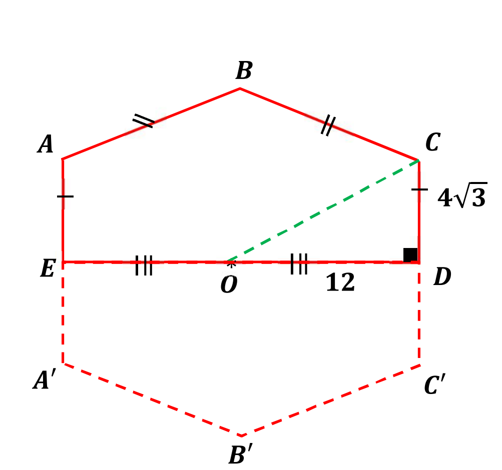
مساحة المربع تساوي $(8\sqrt{2})^2 = 64 \times 2 = 128$

مساحة الدائرة تساوي $\pi R^2 = \pi(4\sqrt{2})^2 = 32\pi$

المساحة المطلوبة تساوي $\frac{(128-32\pi)}{4} = 32 - 8\pi$



5. أنعم النّظر في الشّكل المرسوم جانباً:



a) ارسم صورة نصف المسدس المنتظم $ABCDE$ وفق انعكاسٍ على المستقيم (ED).

b) احسب مساحة المضلع الناتج من الشّكل وصورته.





a) الرسم: وينتج عنه المسدس المنتظم $ABCC'B'A'$.

$(b$ $OC = \sqrt{12^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8\sqrt{3}$

$S = 6\, S_{(OCC')} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times OC^2 = \frac{6\sqrt{3}}{4}(192) = 288\sqrt{3}$

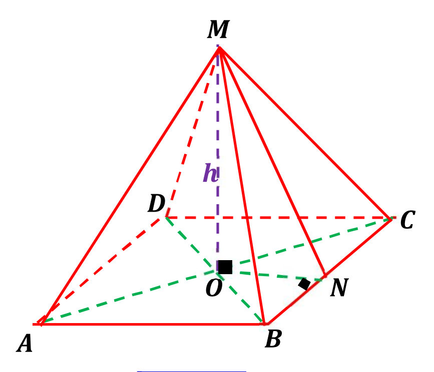
(الدّرس 2 – 5)

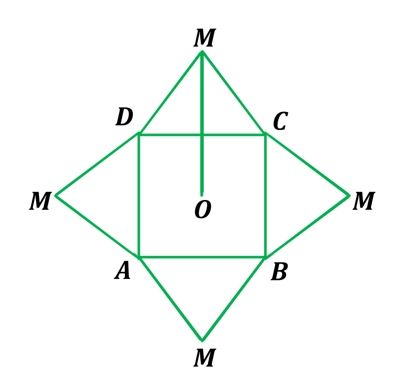
1. ارسم شبكة السطوح لهرمٍ رباعي منتظم طول عامد قاعدته $(L' = 3)$ وطول عامده $(L = 5)$ وارسم الهرم المنتظم فراغياً (منظورياً) ثمَّ احسب:

a) مساحتيه الجانبية والكلية.

b) حجم المجسم الهرمي الناتج.

الحل





a) $h = \sqrt{25-9} = 4$, $ON = L' = 3, MN = L = 5, BC = 2NO = 6$

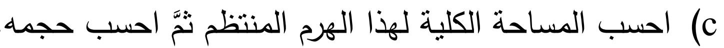
$S_{\ell} = \frac{1}{2} \times p \times L = \frac{1}{2} \times 24 \times 5 = 60$ و $S_t = 60 + 36 = 96$

b) $v = \frac{1}{3} sh = \frac{1}{3}(36)(4) = 48$

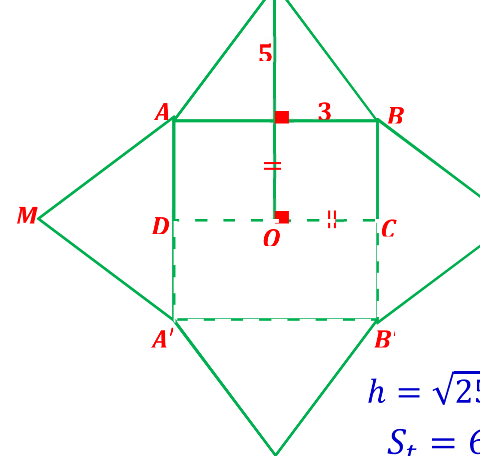
2. في الشّكل المجاور جزء من شبكة السطوح لهرم رباعي منتظم، مركز قاعدته النقطة O والمطلوب:

a) أكمل شبكة السطوح المفروضة.

b) ارسم الهرم المنتظم الموافق لهذه الشبكة فراغياً، وثبت عليه الأطوال الرمزية: a, h, L', L.



c) احسب المساحة الكلية لهذا الهرم المنتظم ثمَّ احسب حجمه.



الحل

a) الرسم

b) $h = \sqrt{25-9} = 4$, $ON = L' = 3, MN = L = 5, BC = 2NO = 6$

$S_{\ell} = \frac{1}{2} \times p \times L = \frac{1}{2} \times 24 \times 5 = 60$ و $S_t = 60 + 36 = 96$

c) $v = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3}(36)(4) = 48$

3. في الشّكل المجاور هرم سداسي منتظم،

قاعدته المسدس المنتظم $ABFDEC$ الذي مركزه النقطة O والمطلوب:

a) ثبِّت عليه الارتفاع (h) ، العامد (L) ، عامد القاعدة (L') ،

طول ضلع القاعدة (a).

b) إذا علمت أنّ: $a = 6\sqrt{3}$ و $L = 18$

فاحسب مساحته الجانبية وحجمه.



a) الرسم

b) $S_\ell = \frac{1}{2} \times P \times L = \frac{1}{2} \times (36\sqrt{3}) \times 18 = 324\sqrt{3}$

$$L' = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6\sqrt{3} = 9 \ , \ \ h = \sqrt{L^2 - L'^2} = \sqrt{324 - 81} = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}$$

$$S_b = \left(6 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = 162\sqrt{3} \ \ , \ \ v = \frac{1}{3} Sh = 1458$$

(الدّرس 3 – 5)

1. في الدائرة $C(O,6)$ احسب قياس القوس التي طولها $\ell = 3\pi$.

2. في الدائرة $C(O,8)$ احسب طول القوس التي قياسها $x = 40^\circ$.

3. في القرص الدائري $C(O,4)$ احسب مساحة القطاع الدائري المركزي الذي قياس قوسه 30°.

4. في القرص الدائري $C(O,10)$ احسب مساحة القطاع الدائري المركزي الذي طول قوسه 5π،

واحسب قياس تلك القوس.

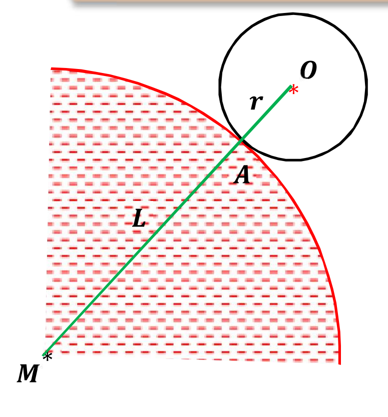
الحل

.1 $x^\circ = \frac{360^\circ \times \ell}{2\pi r} = \frac{360^\circ \times 3\pi}{2\pi \times 6} = 90^\circ$

.2 $\ell = \frac{2\pi r x}{360^\circ} = \frac{2\pi \times 8 \times 40^\circ}{360^\circ} = \frac{16\pi}{9}$

.3 $S = \frac{\pi r^2 x^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \times 16 \times 30^\circ}{360^\circ} = \frac{4\pi}{3}$

.4 $S = \frac{1}{2} . R . \ell = \frac{1}{2} \times 10 \times 5\pi = 25\pi$



5. في الشّكل المجاور شبكة السطوح لمخروط دوراني:

ثبِّت عليها: نصف قطر القاعدة (r) ، المولد(L)،

a) علِّل أنَّ النقط : $M\ ,A\ ,O$ على استقامة واحدة

b) إذا علمت أنَّ : $r = 6\ ,\ L = 10$ ،

احسب طول الارتفاع h.

c) احسب المساحة الجانبية للمخروط الدوراني المفروض، واحسب حجمه.

الحل

انظر الرسم

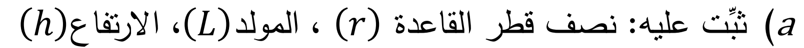
a. القطاع الدائري المركزي الذي مركزه M (هو جزء من قرص)

الدائرة التي مركزها M والدائرة التي مركزها O متماستان خارجاً في النقطة A وبالتالي النقط M, A, O على استقامة واحدة (مبرهنة)

b. $h^2 = L^2 - R^2 = 100 - 36 = 8$ ومنه $h = 8$

c. $S_\ell = \pi\, rL = \pi \times 6 \times 10 = 60\,\pi$ و $v = \frac{1}{3}\pi\, r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 36 \times 8 = 96\pi$


6. الشّكل المجاور رسم فراغي لمخروط دوراني:


a) ثبِّت عليه: نصف قطر القاعدة (r) ، المولد(L)، الارتفاع(h)


b) إذا علمت أنَّ $r = 3\ , h = 4$ ،

فاحسب حجم مجسم المخروط الدوراني الموافق.

c) ارسم شبكة السطوح للمخروط الدوراني السابق، واحسب مساحته الجانبية.

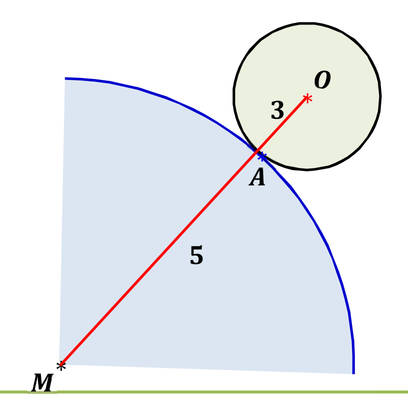

الحل


a) انظر الشكل

b) $v = \frac{1}{3}\pi\, r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 9 \times 4 = 12\pi$

c) $L = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$

$S_\ell = \pi\, rL = \pi \times 3 \times 5 = 15\pi$

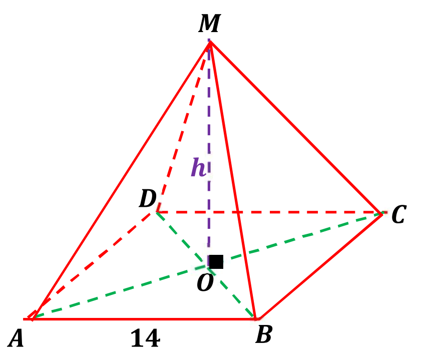


.7 $M - ABCD$ هرم رباعي منتظم طول ارتفاعه $h = 24$

وطول ضلع قاعدته $a = 14$ والمطلوب:

a) احسب المساحة الكلية لهذا الهرم واحسب حجمه.

b) احسب المساحة الجانبية للمخروط الدوراني الذي رأسه M وقاعدته الدائرة الماسة لأضلاع قاعدة الهرم.



الحل

a) $L' = \frac{1}{2}a = 7$ و $L^2 = h^2 + L'^2 = 576 + 49 = 625$ ومنه $L = 25$

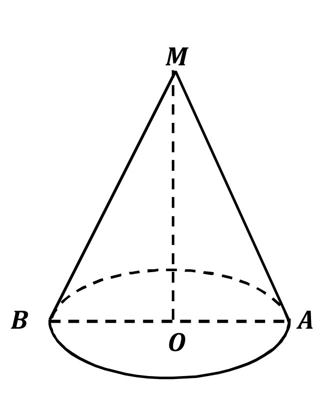
$$S_t = 14^2 + \frac{1}{2} \times 14 \times 4 \times 25 = 196 + 700 = 896$$

$$v = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}14^2 \times 24 = 1568$$

b) طول نصف قطر الدائرة الماسة لأضلاع قاعدة الهرم : $L' = 7$ و $S_\ell = \pi\, rL = 175\,\pi$

.8 مخروط دوراني حجمه $\frac{343\pi}{\sqrt{3}}$ ومساحة قاعدته $49\,\pi$ والمرسوم جانباً:

احسب قياس الزاوية $B\widehat{M}A$.



الحل

$S_b = \pi r^2 = 49\pi$ ومنه $r = 7$

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ومنه $\frac{343\pi}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}(49\,\pi)h$ ومنه $h = OM = 7\sqrt{3}$

$L^2 = h^2 + r^2 = 147 + 49 = 196$ ومنه $L = 14$

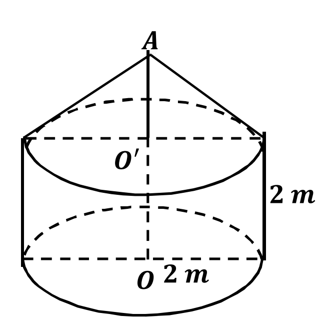
من المثلث القائم MOA نجد $O\widehat{M}A = 30^\circ$ ومنه $A\widehat{M}B = 60^\circ$

.9 الشّكل المجاور يمثّل خيمة أسطوانية سقفها مخروطي الشّكل،

وطول ارتفاعها الكلي $OA = 3.5\,m$:

a) احسب حجم مجسم الخيمة

b) كم متراً مُربّعاً من القماش يلزم لصنع هذه الخيمة.



الحل

a) حجم مجسم الخيمة (v) =حجم أسطوانة (v_1) +حجم مخروط (v_2) ومنه

$v = \pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^2 h'$ ومنه $v = \pi \times 4 \times 2 + \frac{1}{3}\pi \times 4 \times 1.5 = 8\pi + 2\pi = 6\pi$

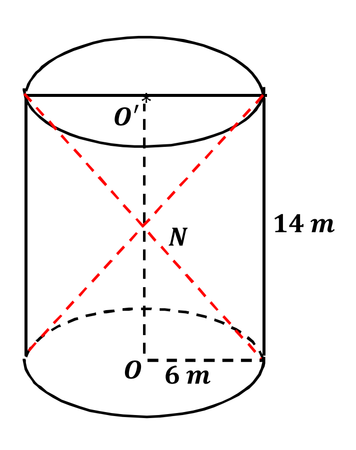
b) يلزم S متراً مربعاً من القماش حيث: $S = S_1\left(\text{أسطوانة}\right) + S_2(\text{مخروط})$

$S = 2\pi\, r\, h + \pi\, rL = 2\pi \times 2 \times 2 + \pi \times 2 \times 2.5 = 8\pi + 5\pi = 13\pi$

حيث $L = \sqrt{4 + (1.5)^2} = 2.5$

10. أسطوانة دورا نية قائمة طول نصف قطر قاعدتها 6 وارتفاعها 14 بداخلها مخروطان دورانيان قاعدتاهما قاعدتا الأسطوانة، ورأس كلٍّ منهما N منتصف $[OO']$،

أوجد حجم الجزء المحصور بين الأسطوانة والمخروطين.



الحل

حجم الأسطوانة: $v_1 = \pi\, r^2 h = \pi 6^2 (14) = 504\pi$

حجم المخروط: $v_2 = \frac{1}{3}\pi\, r^2 h = \frac{1}{3}\pi(6)^2 \times 7 = 84\pi$

الحجم المطلوب: $v = v_1 - 2v_2 = 336\pi$



توزيـــــع مــــــادتي الجــــبر والهندســـــة

ثلاث حصص للجبر وحصتان للهندسة أسبوعياً في الفصل الأول

حصتان للجبر وثلاث حصص للهندسة أسبوعياً في الفصل الثاني

الشهر	الأسبوع	الجبر	الهندسة
أيلول	3	الإحصاء الرياضي	المستقيمات المتوازية والقواطع
	4	الإحصاء الرياضي	المستقيمات المتوازية والقواطع
تشرين الأول	1	الإحصاء الرياضي	المستقيمات المتوازية والقواطع
	2	الإحصاء الرياضي	المستقيمات المتوازية والقواطع
	3	الإحصاء الرياضي	المستقيمات المتوازية والقواطع
	4	الأعداد النسبية	المستقيمات المتوازية والقواطع
تشرين الثاني	1	الأعداد النسبية	المستقيمات المتوازية والقواطع
	2	الأعداد النسبية	المستقيمات المتوازية والقواطع
	3	الأعداد الحقيقية	النسب المثلثية للزاوية الحادة والقياس غير المباشر
	4	الأعداد الحقيقية	النسب المثلثية للزاوية الحادة والقياس غير المباشر
كانون الأول	1	الأعداد الحقيقية	النسب المثلثية للزاوية الحادة والقياس غير المباشر
	2	الأعداد الحقيقية	النسب المثلثية للزاوية الحادة والقياس غير المباشر
	3	الأعداد الحقيقية	الدائرة
	4	الأعداد الحقيقية	الدائرة

<table dir="rtl">
<tr><td rowspan="4">كانون الثاني</td><td>1</td><td colspan="2" rowspan="3">امتحان الفصل الأول + عطلة منتصف العام الدراسي</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>لغة الجبر</td><td>الدائرة</td></tr>
<tr><td rowspan="4">شباط</td><td>1</td><td>لغة الجبر</td><td>الدائرة</td></tr>
<tr><td>2</td><td>لغة الجبر</td><td>الدائرة</td></tr>
<tr><td>3</td><td>لغة الجبر</td><td>الدائرة</td></tr>
<tr><td>4</td><td>المعادلات الخطية</td><td>التحويلات الهندسية</td></tr>
<tr><td rowspan="4">آذار</td><td>1</td><td>المعادلات الخطية</td><td>التحويلات الهندسية</td></tr>
<tr><td>2</td><td>المعادلات الخطية</td><td>التحويلات الهندسية</td></tr>
<tr><td>3</td><td>المعادلات الخطية</td><td>التحويلات الهندسية</td></tr>
<tr><td>4</td><td>التوابع</td><td>التحويلات الهندسية</td></tr>
<tr><td rowspan="4">نيسان</td><td>1</td><td>التوابع</td><td>تتمات في المضلعات</td></tr>
<tr><td>2</td><td>الاحتمالات</td><td>تتمات في المضلعات</td></tr>
<tr><td>3</td><td>الاحتمالات</td><td>تتمات في المضلعات</td></tr>
<tr><td>4</td><td>الاحتمالات</td><td>تتمات في المضلعات</td></tr>
<tr><td>أيار</td><td colspan="3">مراجعة عامـــــــــــــــــــــــــــــــــــة</td></tr>
</table>